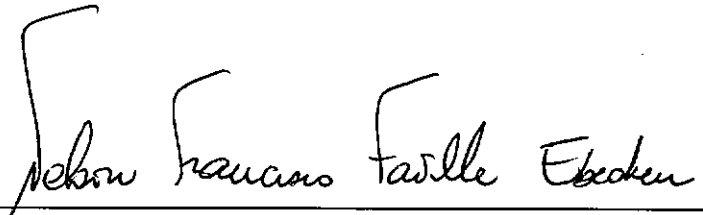


ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM ESTRUTURAS
METÁLICAS PREDOMINANTEMENTE AXISSIMÉTRICAS

GRAY FARIAS MOITA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA CIVIL.

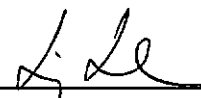
APROVADA POR :



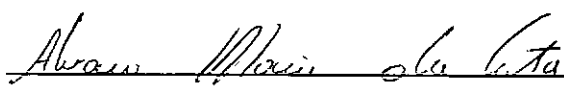
PROF. NELSON F. FAVILLA EBECKEN, D.Sc.
(PRESIDENTE)



PROF. EDISON CASTRO P. DE LIMA, D.Sc.



PROF. LUIZ LANDAU, D.Sc.



ENG. ALVARO MAIA DA COSTA, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO DE 1990

MOITA, GRAY FARIAS

Análise da Propagação de Trincas em Estruturas Metálicas Prodominantemente Axissimétricas (Rio de Janeiro), 1990.

xi, 108 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1990

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1.Análise de Cascas pelo M.E.F.

2.Mecânica da Fratura

I.COPPE/UFRJ

II.Título (série)

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Nelson F. F. Ebecken pelo incentivo e descontração durante a orientação, fundamentais para o êxito deste trabalho.

Aos pesquisadores e amigos Breno P. Jacob, Luiz A. de Souza e José L. D. Alves pela valorosa ajuda.

Aos amigos da turma de estruturas, especialmente aos companheiros do Laboratório de Computação (B-103) pela troca de informações e pelo ótimo ambiente de trabalho por eles proporcionado.

Aos professores da Área de Estruturas e Funcionários do Programa de Engenharia Civil.

Aos meus pais,

Adalberto e Lourdes.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS (M.Sc.)

**ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM ESTRUTURAS
METÁLICAS PREDOMINANTEMENTE AXISSIMÉTRICAS**

GRAY FARIAS MOITA

Maio, 1990

Orientador : Nelson Francisco Favilla Ebecken

Programa : Engenharia Civil

Este trabalho tem por objetivo fazer uma Avaliação da Propagação de Trincas em Estruturas Metálicas com Características Predominantemente Axissimétricas. São utilizados elementos finitos de casca axissimétrica nas regiões axissimétricas da estrutura e elementos de casca tridimensional geral nas regiões onde ocorrem imperfeições na geometria. O acoplamento entre estas duas regiões é feito através de um "Elemento de Casca de Transição".

A análise da propagação de trincas é efetuada com o uso de um Modelo de Linha de Molas e através dele se pode calcular o Fator de Intensidade de Tensões K e a Integral J , além de outros parâmetros importantes na análise.

Apresentam-se alguns exemplos, discussões e comparações de resultados. As vantagens e as limitações do enfoque proposto são também comentadas.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF
SCIENCE (M.Sc.)

**CRACK-GROWTH ANALYSIS OF QUASI-AXISYMMETRIC
STEEL STRUCTURES**

GRAY FARIAS MOITA

May, 1990

Thesis Supervisor : Nelson Francisco Favilla Ebecken

Departament : Civil Engineering

The purpose of this work is to realize an Evaluation of the Crack-Growth of Quasi-Axisymmetric Steel Structures by the FEM. Axisymmetric shell finite elements are used in the axisymmetric regions of the structure and 3-D shell elements in the regions where geometric deviations are found. The interface between these two regions is made through a "Transitional Element".

The Crack-Growth Simulation is achieved by the Line-Spring Model and, with this procedure, the Stress Intensity Factor K , the J-Integral and other fracture parameters are obtained.

Some applications are presented to access the

performance of the implemented strategy. The advantages and the limitations of this strategy are also discussed.

ÍNDICE

Capítulo I - Introdução	1
Capítulo II - Discretização pelo M.E.F.	7
II.1 - Introdução	7
II.2 - Elemento de Casca Axissimétrica Isoparamétrico Quadrático	8
II.3 - Elemento de Superfície de Geometria Qualquer	16
II.4 - Elemento de Transição Isoparamétrico Quadrático	20
Capítulo III - Modelo de Linha de Molas	28
III.1 - Introdução	28
III.2 - Conceitos Gerais	29
III.3 - Vantagens do Modelo de Linha de Molas	37
III.4 - Desenvolvimento do Modelo de Linhas de Molas	39
Capítulo IV - Implementação Computacional	57
IV.1 - Introdução	57
IV.2 - Organização Geral do Sistema Computacional	58
a- Entrada de Dados Gerais e da Estrutura	58
b- Entrada de Dados de Carregamento e Formação do Vetor de Cargas Equivalentes \tilde{P}	61
c- Montagem da Matriz de Rigidez Global \tilde{K}	62
d- Resolução do Sistema de Equações	64

e- Organização e Impressão dos Deslocamentos Finais	65
f- Cálculo e Impressão de Tensões	65
g- Cálculo do Fator de Intensidade de Tensões, Integral J e Demais Parâmetros Importantes na Avaliação do Crescimento da Fratura	65
IV.3 - Linguagem e Ambiente Computacional	66
IV.4 - Pós-Processamento	67
Capítulo V - Aplicações do Sistema	69
V.1 - Introdução	69
V.2 - Considerações sobre o Elemento de transição	70
V.3 - Cilindro submetido à Pressão Interna e à Tração	73
V.4 - Vaso de Pressão - Cilindro com Extremidades Fechadas por Cúpulas Hemisféricas	79
V.5 - Esfera para Armazenamento de G.L.P.	87
Capítulo VI - Conclusão	95
Referências Bibliográficas	98
Apêndice 1 - Matriz de transformação de Coordenadas para o Elemento de Casca Axissimétrica	103
Apêndice 2 - Matriz de Transformação para os Elementos de Casca Geral e de Transição	105

CAPÍTULO I

Introdução

Grande parte das concepções estruturais utilizadas em instalações industriais se vale de estruturas de superfície de geometria perfeitamente axissimétrica ou com pequenas irregularidades localizadas . Em tais estruturas, o uso do Método dos Elementos Finitos é muito oportuno, principalmente levando-se em conta a axissimetria citada e utilizando-se formulações de elemento de casca especialmente desenvolvido para esse fim. Com isso, obtêm-se resultados satisfatórios através de uma discretização muito simples e eficiente. Porém, essa abordagem só é adequada perfeitamente quando se trata de estruturas totalmente axissimétricas. Em estruturas de casca com geometria qualquer, o Método do Elementos Finitos se vale de outros tipos de elementos de caracter mais geral. Sendo assim, para analisar uma estrutura axissimétrica que apresente uma irregularidade, embora localizada, deve-se fazer uma discretização utilizando-se elementos finitos de teoria de cascas delgadas gerais.

Para contornar esse problema, FELIPPA [1] propôs uma nova aproximação para analisar cascas axissimétricas com imperfeições localizadas. Essas estruturas embora se apresentem como basicamente axissimétricas, têm sua geometria perturbada por imperfeições localizadas (furos, bocais, ligações, fraturas, apoios, enrijecedores,

tubulações etc.). Com isso, esse tipo de estrutura poderia ser analisada de duas maneiras diferentes: a primeira, como mencionado anteriormente, utilizaria somente elementos gerais e a segunda empregaria uma malha de elementos axissimétricos, obtendo-se uma solução aproximada, e analisando-se as irregularidades com mais detalhe através de um modelo tridimensional mais refinado. Pela proposta de FELIPPA a região axissimétrica da casca seria modelada com elementos axissimétricos e na região com irregularidades seriam utilizados elementos de cascas gerais, sendo que os dois sistemas seriam acoplados na interface empregando-se equações de restrição generalizadas.

O uso do enfoque proposto é bem atraente pois evita o excesso de gastos computacionais da modelagem com elementos gerais e os resultados grosseiros obtidos com uma malha axissimétrica. Combinando-se os dois modelos consegue-se uma aproximação que alia a economia do modelo axissimétrico com a precisão do tratamento tridimensional completo. Entretanto existe uma falha neste enfoque já que não se considera a compatibilidade de deslocamento na interface, tendo em vista que na direção circunferencial o elemento de casca de revolução usa Séries de Fourier para expressar o campo de deslocamento e o elemento de casca geral, por sua vez, usa algumas outras funções, geralmente de interpolação polinomiais, para expressar esse campo de deslocamentos.

HAN e GOULD [2] estabeleceram uma formulação que,

através de elementos finitos de casca de transição, conseguem superar o problema antes ocorrido. Os elementos de transição possuem uma linha nodal que une um elemento axissimétrico aos pontos nodais dos outros contornos (Figura I.1). A linha nodal acomoda a representação em Série de Fourier do elemento axissimétrico e os pontos nodais têm as mesmas funções de interpolação polinomiais do elemento de casca desenvolvido por ZIENKIEWICZ et all [3]. Foi através desses elementos que pode-se desenvolver um sistema computacional em elementos finitos para análise de cascas ditas Quasi-axissimétricas como pode ser visto na referência [4] e que foi tomado como um ponto de partida para o trabalho em questão.

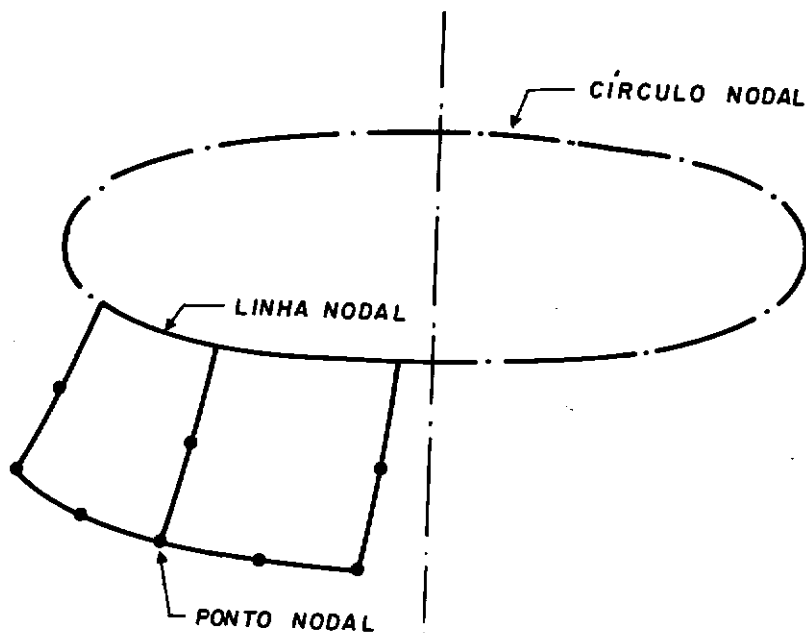


Figura I.1 - Elementos de casca de transição

Como foi dito acima, a irregularidade existente numa

estrutura axissimétrica pode ser devido ao surgimento de trincas. Assim, estruturas de cascas como reservatórios, tanques de armazenamento de combustíveis, vasos de usinas nucleares, vasos de pressão etc., que apresentam geometria axissimétrica e que estão em geral sujeitas a carregamentos rigorosos podem muito frequentemente apresentar trincas não-passantes ao longo de sua espessura. As trincas surgem por defeitos diversos (defeitos de fabricação, tensões internas residuais, corrosão, fadiga etc.) e causam uma perda parcial na resistência da estrutura, que embora não danificando totalmente a mesma, pois a parte não trincada pode ainda absorver e transmitir esforços, devem ser estudados cuidadosamente já que o colapso total da estrutura, neste caso, está intimamente ligado a velocidade de propagação e abertura da trinca.

Para medir a instabilidade da trinca pode ser calculado um parâmetro, que permite avaliar a propagação da trincas em relação à resistência à fratura do material, introduzido por IRWIN e conhecido como **Fator de Intensidade de Tensões**. A determinação do Fator de intensidade de tensões está condicionado ao conhecimento do campo de tensões ao redor da extremidade da fratura que não é de fácil obtenção analítica e que resulta numa singularidade com tensões tendendo para o infinito em torno da extremidade da fratura. Soluções numéricas através do Método dos Elementos Finitos são mais rápidas e mais eficientes para este caso. Em uma das técnicas utiliza-se um elemento conhecido como "Quarter-Point Element". Outra

técnica determina a taxa de energia potencial dissipada por comprimento de fratura, que em regime linear relaciona-se com o fator de intensidade de tensões e é conhecida por Integral J.

O maior problema enfrentado é que para levar em conta que a trinca é não passante, deve-se recorrer a uma discretização tri-dimensional e isso acarreta uma análise de difícil discretização e sobretudo onerosa. Para evitar essa discretização, RICE e LEVY [5] desenvolveram um modelo de Elementos Escalares de Linha de Molas (line-Spring Model), no qual a fratura é modelada com uma linha de molas que se ligam aos elementos de casca geral (ZIENKIEWICZ [3]) utilizados na discretização da estrutura. Nestes elementos, as molas simulam a rigidez remanescente da estrutura, já que a trinca não atravessa completamente a espessura, sendo capazes de transmitir tanto esforços normais quanto momentos fletores. Com esse tratamento, a análise se torna de fácil discretização e com um esforço computacional bastante reduzido.

Neste trabalho estuda-se a aplicação de um sistema computacional desenvolvido para a análise de cascas quasi-axissimétricas onde as trincas que surgem são tratadas da mesma forma que uma irregularidade qualquer, que retira as propriedades de axissimetria em uma determinada região da estrutura. Com isso pretendeu-se construir uma ferramenta para uma análise eficiente e confiável da propagação de trincas em cascas

axissimétricas.

Os elementos utilizados na discretização da casca, principalmente o elemento de transição, são abordados no capítulo II. Nesse capítulo será também dada uma especial atenção ao carregamento aplicado, com relação a sua simetria e não-simetria, que requer cuidados adicionais no desenvolvimento em série de Fourier.

No capítulo III será apresentado o modelo de linha de molas utilizado com suas vantagens e limitações. Uma breve explanação sobre mecânica da fratura e sobre os modos I, II e III de abertura de fratura também será mostrada neste capítulo.

O sistema computacional implementado, com detalhes sobre a organização, entrada de dados, ambiente etc, é apresentado no capítulo IV. No capítulo V são apresentados resultados de aplicações, e no capítulo VI as conclusões e comentários.

Outros dados necessários ao desenvolvimento da formulação são apresentados em apêndice.

CAPÍTULO II

Discretização pelo M.E.F.

II.1 - INTRODUÇÃO

A discretização foi efetuada através do M.E.F. com a utilização de três tipos de elementos. As regiões axissimétricas foram discretizadas por elementos especialmente desenvolvidos para casca axissimétrica, enquanto que as regiões com irregularidades foram modeladas com elementos de casca que permitem a discretização de superfícies de geometria qualquer. A união entre as duas regiões se vale de elementos especiais de transição.

Os elementos de casca axissimétrica e de casca geral são obtidos através da degeneração dos elementos sólidos axissimétrico e tridimensional, respectivamente. O elemento de transição possui uma formulação própria que é desenvolvida com base nos dois outros elementos usados.

Neste capítulo serão mostradas as características principais de cada elemento utilizado, indicando-se as referências para uma explicação mais detalhada da formulação desenvolvida.

Deve-se notar que toda a formulação se baseia no sistema de coordenadas cilíndricas x , θ , z da Figura II.1 já que as estruturas analisadas são predominantemente

axissimétricas.

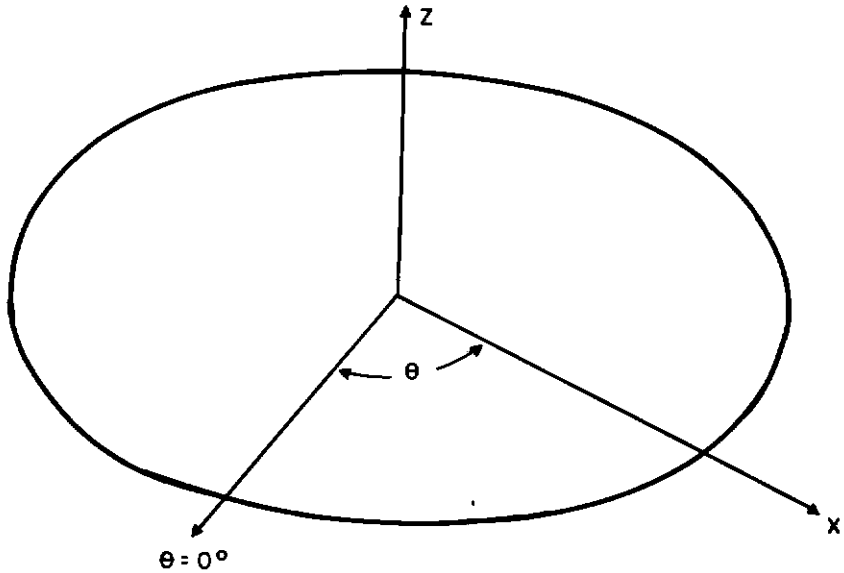


Figura II.1 - Sistema de Coordenadas Cilíndricas

II.2 - ELEMENTO DE CASCA AXISSIMÉTRICA ISOPARAMÉTRICO QUADRÁTICO

A Figura II.2 mostra o elemento utilizado na discretização da região axissimétrica. Este elemento é derivado do elemento de sólido axissimétrico quadrático através da redução da espessura e eliminação dos nós intermediários [3, 4, 6, 7]. Assim, as coordenadas x , θ e z do elemento são relacionadas com as coordenadas curvilíneas pela expressão

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \left(\frac{1 + \zeta}{2} \right) \begin{Bmatrix} x_i \\ \theta_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{Sup.}} + \sum_{i=1}^3 N_i \left(\frac{1 - \zeta}{2} \right) \begin{Bmatrix} x_i \\ \theta_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{\text{Inf.}} \quad (\text{II.1})$$

sendo N_i uma função de interpolação **serendipity** quadrática somente em ξ , conforme [4].

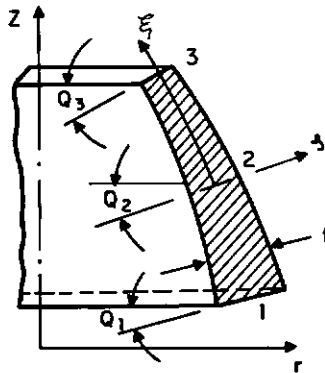


Figura II.2 - Elemento de Casca Axissimétrico

A equação II.1 também pode ser escrita em termos das coordenadas da superfície média e do vetor espessura \vec{V}_{31} (Figura II.3):

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ \theta_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^3 N_i \frac{\zeta}{2} \vec{V}_{31} \quad (\text{II.2})$$

O vetor \vec{V}_{31} é normal ao nó i e tem o comprimento da espessura da casca no ponto em questão.

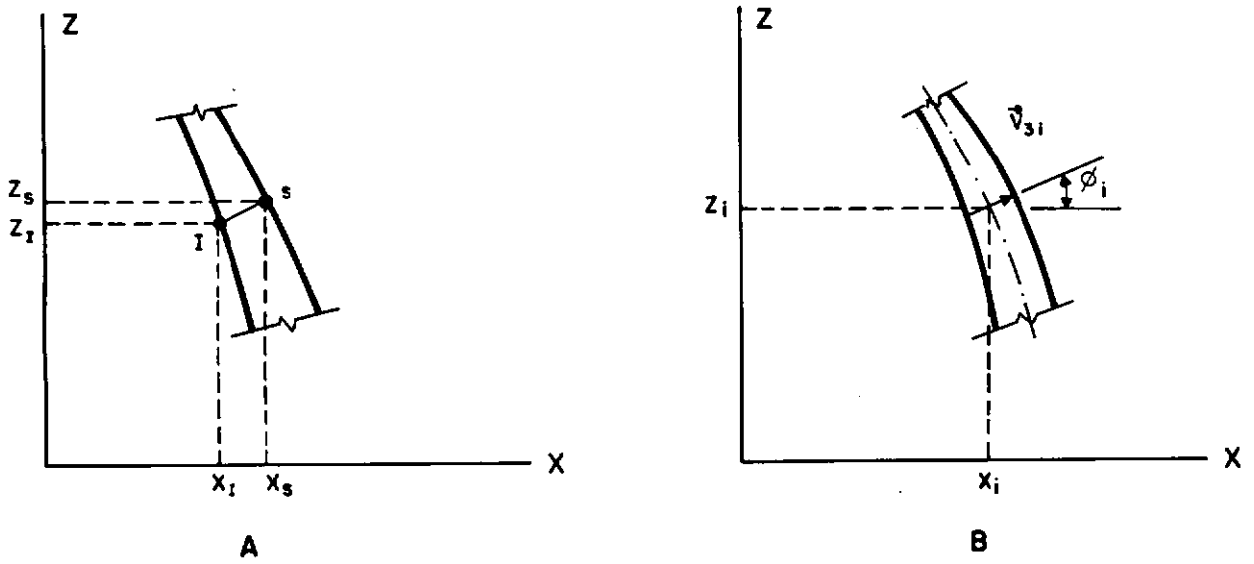


Figura II.3

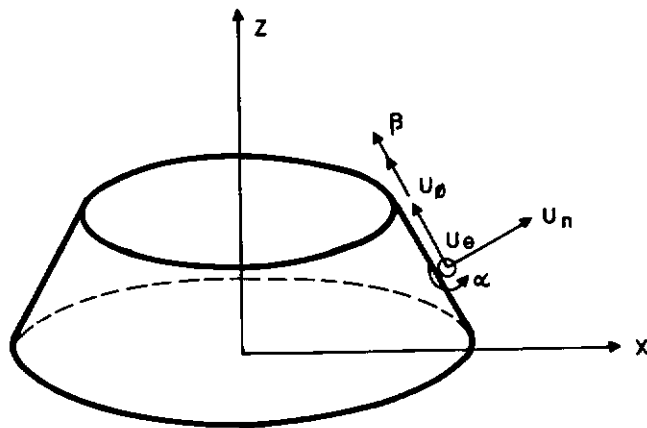


Figura II.4

O próximo passo é a definição dos deslocamentos. Uma importante observação a ser lembrada é que nestes elementos não se leva em conta a energia de deformação normal à superfície média. Com isso, o campo de deslocamento é composto por cinco graus de liberdade por nó (Figura II.4), três componentes de translação, u_{ϕ_i} , na direção meridional, u_{θ_i} na circunferencial e u_{n_i} na normal, e duas componentes de rotação, definidas pela rotação do vetor espessura em torno das direções circunferencial, α_i , e meridional, β_i .

Neste ponto, para expressar as componentes de deslocamentos ao longo da direção e deve-se fazer uso de um desenvolvimento em Série de Fourier. De acordo com as referências [2, 3, 4], estas componentes são:

$$\begin{Bmatrix} u_{\phi_i} \\ u_{\theta_i} \\ u_{n_i} \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \sum_j \begin{Bmatrix} u_{\phi_i} \cos j\theta \\ u_{\theta_i} \sin j\theta \\ u_{n_i} \cos j\theta \\ \alpha_i \cos j\theta \\ \beta_i \sin j\theta \end{Bmatrix} + \sum_j \begin{Bmatrix} \hat{u}_{\phi_i} \sin j\theta \\ \hat{u}_{\theta_i} (-\cos j\theta) \\ \hat{u}_{n_i} \sin j\theta \\ \hat{\alpha}_i \sin j\theta \\ \hat{\beta}_i (-\cos j\theta) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

Como no caso geral não se tem uma simetria no campo de deslocamentos, o primeiro somatório corresponde à parte simétrica do desenvolvimento e o segundo corresponde ao desenvolvimento antissimétrico.

Na expressão II.3, $u_{\phi_i}^j$, $u_{\theta_i}^j$, $u_{n_i}^j$, α_i^j e β_i^j são os j -ésimos graus de liberdade por harmônico para cada nó no desenvolvimento simétrico. Os termos da segunda parcela da

expressão II.3 representam os graus de liberdade por harmônico da parcela antissimétrica.

Seguindo-se com o desenvolvimento (referência [4]), chega-se ao campo de deslocamento para o elemento de casca axissimétrica. Os deslocamentos de translação em coordenadas cartesianas para cada ponto do elemento são agora representados pela expressão:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum_j \sum_{i=1}^3 N_i \tilde{T}_i \left(\tilde{\theta}^j \begin{pmatrix} u_{\phi_1}^j \\ u_{\theta_1}^j \\ u_{n_1}^j \end{pmatrix} + \hat{\theta}^j \begin{pmatrix} \hat{u}_{\phi_1}^j \\ \hat{u}_{\theta_1}^j \\ \hat{u}_{n_1}^j \end{pmatrix} \right) +$$

$$\sum_j \sum_{i=1}^3 N_i \zeta \frac{t_i}{2} \tilde{T}_{11} \left(\tilde{\theta}_1^j \begin{pmatrix} \alpha_1^j \\ \beta_1^j \end{pmatrix} + \hat{\theta}_1^j \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1^j \\ \hat{\beta}_1^j \end{pmatrix} \right)$$

(II.4)

Onde

$$\tilde{\theta}^j = \begin{bmatrix} \cos j\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin j\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos j\theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

$$\hat{\tilde{\theta}}^j = \begin{bmatrix} \text{sen } j\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\cos j\theta & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen } j\theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

$$\tilde{\theta}_1^j = \begin{bmatrix} \cos j\theta & 0 \\ 0 & \text{sen } j\theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

$$\hat{\tilde{\theta}}_1^j = \begin{bmatrix} \text{sen } j\theta & 0 \\ 0 & -\cos j\theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

$$\tilde{T}_1 = \begin{bmatrix} -\text{sen } \phi_1 & 0 & \cos \phi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi_1 & 0 & \text{sen } \phi_1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

$$\tilde{T}_{1i} = \begin{bmatrix} -\text{sen } \phi_1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cos \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

A matriz constitutiva para materiais lineares isotrópicos, é dada neste caso como:

$$\tilde{D}' = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1 - \nu}{2} & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & & \frac{1 - \nu}{2k} & 0 \\ & & & & \frac{1 - \nu}{2k} \end{bmatrix}$$

(II.11)

A constante $k = 1,2$ é um fator de correção que melhora os resultados das deformações por efeito cortante (Zienkiewicz [3]).

A matriz \tilde{B}' , que relaciona as deformações aos deslocamentos nodais, isto é,

$$\tilde{\varepsilon}' = \tilde{B}' \tilde{U}'^e \quad (\text{II.12})$$

é obtida seguindo-se o desenvolvimento indicado em Jacob [4], utilizando-se as componentes de deformações $\tilde{\varepsilon}'$, desprezando-se a direção da espessura (componente ε'_z).

Deve ser observado que as deformações $\tilde{\varepsilon}'$ estão referidas ao sistema local de coordenadas e são obtidas através da transformação abaixo [6]:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{x'} & \frac{1}{2} \epsilon_{x'\theta} & \frac{1}{2} \epsilon_{x'z'} \\ \frac{1}{2} \epsilon_{x'\theta} & \epsilon_{\theta} & \frac{1}{2} \epsilon_{\theta z'} \\ \frac{1}{2} \epsilon_{x'z'} & \frac{1}{2} \epsilon_{\theta z'} & \epsilon_{z'} \end{bmatrix} = \quad (II.13)$$

$$[\tilde{T}]^t \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \epsilon_{x\theta} & \frac{1}{2} \epsilon_{xz} \\ \frac{1}{2} \epsilon_{x\theta} & \epsilon_{\theta} & \frac{1}{2} \epsilon_{\theta z} \\ \frac{1}{2} \epsilon_{xz} & \frac{1}{2} \epsilon_{\theta z} & \epsilon_z \end{bmatrix} [\tilde{T}]$$

A matriz \tilde{T} , para a transformação de coordenadas, é formada pelos cossenos diretores nas direções meridional, circunferencial e normal. A determinação de \tilde{T} será mostrada em anexo, no apêndice 1. As deformações definidas no referencial global são as seguintes:

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{\theta} \\ \epsilon_{x\theta} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{u}{x} + \frac{1}{x} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (II.14)$$

De posse das matrizes \tilde{B}' e \tilde{D}' , e considerando-se que a matriz Jacobiana já foi calculada, pode-se obter a matriz de rigidez do elemento de casca axissimétrica

através da expressão:

$$\tilde{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \tilde{B}'^t \tilde{D} \tilde{B}' ||J|| r(\xi, \zeta) d\theta d\zeta d\xi \quad (II.15)$$

É necessário agora mencionar que para o elemento axissimétrico a integração foi feita da seguinte maneira:

- Na direção ξ a integração é numérica, com dois pontos de Gauss;

- Nas direções ζ e θ a integração é explícita. Deve-se ainda notar que, para cascas não muito espessas, o Jacobiano independe de ζ , e é calculado na superfície média com $\zeta = 0$.

II.3 - ELEMENTO DE SUPERFÍCIE DE GEOMETRIA QUALQUER

O elemento utilizado na discretização da porção onde as imperfeições da casca axissimétrica ocorrem é o mostrado na Figura II.5. Este elemento é obtido de uma transformação do elemento isoparamétrico tridimensional quadrático de vinte nós, com três graus de liberdade por nó, de maneira análoga à feita com o elemento axissimétrico. Desta forma este elemento, agora com oito nós, apresenta os mesmos cinco graus de liberdade por nó do elemento axissimétrico. Também neste elemento, a energia de deformação das tensões normais à superfície média da casca é desprezada e considera-se que as normais à superfície média permanecem

retas após a deformação, mas não necessariamente normais. Desta forma o elemento está capacitado a sofrer deformações devido ao esforço cortante, que são de muita importância para análise de cascas moderadamente espessas.

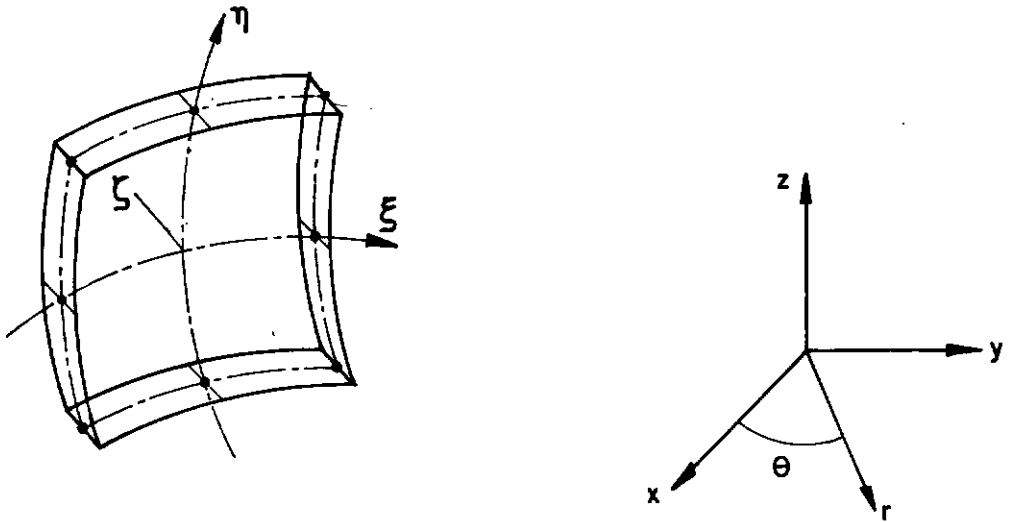


Figura II.5 - Elemento de Casca Geral e Sistema Global de Coordenadas

Da mesma maneira que se obteve a geometria do elemento axissimétrico, equação II.2, têm-se agora a geometria do elemento de casca geral:

$$\begin{Bmatrix} r \\ \theta \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \begin{Bmatrix} r_i \\ \theta_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i \frac{\xi}{2} \vec{v}_{3i} \quad (\text{II.16})$$

É importante ressaltar neste ponto que as funções de interpolação Serendipity quadráticas N_i são agora funções tanto de ξ como de η [3] e obedecem uma numeração adotada para os nós do elementos de casca geral, conforme a Figura II.6. Estas funções de interpolação podem ser encontradas na referência [4].

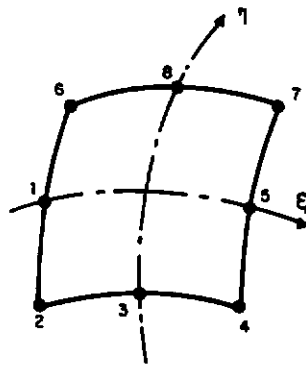


Figura II.6 - Superfície Média do Elemento Geral

A definição do campo de deslocamentos de um elemento de casca geral isoparamétrico quadrático é dado por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i \zeta \frac{t_i}{2} \tilde{T}_{1i} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Sendo T_{11} a matriz de transformação de coordenadas e que é obtida no apêndice 2.

Os deslocamentos para cada ponto nodal são: três componentes de translação u_1 , v_1 e w_1 e duas componentes de rotação α_1 e β_1 (Figura II.5).

Deve-se proceder agora a determinação das componentes de deformação ϵ' para a definição de B' , da mesma forma que para o elemento axissimétrico (expressão II.12).

As deformações são definidas em relação aos eixos locais de superfície $x'y'z'$ e são obtidas diretamente das relações do elemento tridimensional, desconsiderando-se a deformação normal à superfície média da casca, como dito anteriormente. Com isso, tem-se:

$$\epsilon' = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \epsilon_{x'y'} \\ \epsilon_{x'z'} \\ \epsilon_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

Seguindo-se passos semelhantes ao do elemento de casca axissimétrica e que estão detalhadas na referência

[4], chega-se a matriz \tilde{B}' que está pronta para ser utilizada na determinação da matriz de rigidez, efetuando-se:

$$\tilde{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{B}'^t \tilde{D} \tilde{B}' ||J|| d\xi d\eta d\zeta \quad (II.19)$$

\tilde{D}' é a mesma matriz elástica da expressão II.11. A integração é feita numericamente, utilizando-se o esquema de integração reduzida com 2x2 pontos de Gauss na superfície média (ξ e η), e na direção da espessura ζ adota-se a mesma integração explícita já esclarecida para o elemento axissimétrico.

II.4 - ELEMENTO DE TRANSIÇÃO ISOPARAMÉTRICO QUADRÁTICO

Depois de estabelecida a formulação empregada nos elementos de casca axissimétrica e geral, deve ser estudada a união entre as duas porções feita, neste caso, com um elemento dito de transição (referência [2]). Este elemento possui uma formulação semelhante à desenvolvida para o elemento de casca geral, a diferença consiste na utilização de uma linha nodal na fronteira de ligação com a região axissimétrica (Figura II.7). Conceitualmente, pode-se entender esta linha nodal como um nó móvel que percorre a interface com a região axissimétrica.

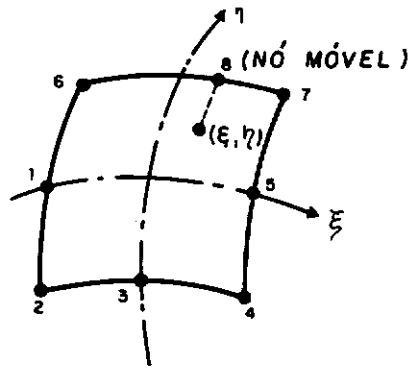


Figura II.7 - Superfície Média do Elemento de Transição

Para que seja conseguida a compatibilidade de deslocamentos entre as regiões mencionadas, a linha nodal tem a capacidade de acomodar o desenvolvimento em Série de Fourier na direção circunferencial, como no elemento axissimétrico, enquanto que os pontos nodais do elemento de transição apresentam funções polinomiais como as definidas para o elemento de casca geral.

As considerações da energia de deformação das tensões normais à superfície média ser desprezível e de as normais à superfície permanecerem retas após à deformação, como estabelecido para o elemento de casca geral, são válidas também para o elemento de transição. A mesma expressão II.16 para a geometria é empregada.

Ao longo da linha nodal, uma nova função de interpolação que satisfaça a continuidade é necessária. Nesta linha nodal os deslocamentos podem ser expressos

considerando-os apenas como função da coordenada curvilínea ξ . Assim, deve-se ter uma função $\Omega(\xi)$ que satisfaça o critério de completude do MEF, apresentando a primeira derivada contínua, e que possibilite um desenvolvimento em Série de Fourier.

Para o elemento de transição, as funções de interpolação Serendipity são as mesmas do elemento de casca geral para os nós de 1 a 5. Uma especial atenção, entretanto, deve ser dada as funções de interpolação para os nós de 6 a 8 que correspondem ao contorno superior do elemento de transição (Figura II.8). Isto se deve ao fato de que é necessário que haja compatibilidade de deslocamentos entre elementos, sendo preciso elaborar uma função $\Lambda(\xi, \eta)$ única para a linha nodal, que seja igual a $\Omega(\xi)$ ao longo desta linha e que se anule nos outros pontos nodais, e que, além disso, apresente uma variação suave sobre o domínio.

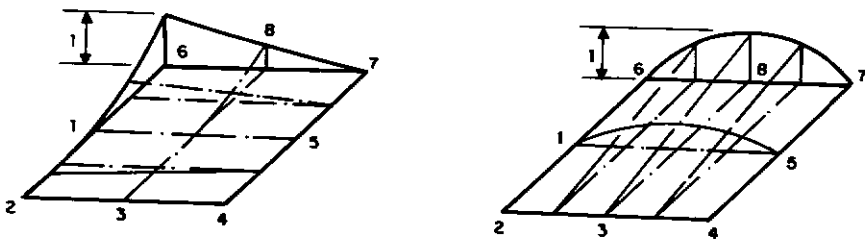


Figura II.8 - Funções de Interpolação

Esta função, desenvolvida nas referências [2,4] é a

seguinte:

$$\Lambda(\xi, \eta) = N_6 \lambda_6 + N_7 \lambda_7 + N_8 \lambda_8 \quad (\text{II.20})$$

$$N_6 = -0.25(1 - \xi)(1 - \eta^2) \quad (\text{II.21})$$

$$N_7 = -0.25(1 + \xi)(1 - \eta^2) \quad (\text{II.22})$$

$$N_8 = 0.5(1 + \eta) \quad (\text{II.23})$$

$$\lambda_8 = \Omega(\xi) \quad (\text{II.24})$$

As funções N_6 , N_7 e N_8 representam as funções de interpolação para o contorno superior do elemento de transição. Estas funções, juntamente com as estabelecidas para os nós de 1 a 5 do elemento de casca geral, podem ser usadas para especificar tanto deslocamentos com geometria de um elemento de transição.

Diferentemente de uma formulação comum de elemento finito, em que todos os graus de liberdades nodais são independentes, os graus de liberdade que correspondem aos nós 6, 7 e 8 não são independentes, mas são dependentes da função Ω e são utilizados como uma ferramenta para efetuar a variação indicada na Figura II.9. Assim, os nós 6, 7 e 8 são sub-nós dentro de uma linha nodal, sendo que as funções de interpolação (II.21) a (II.23) para os sub-nós também são parcelas da função de interpolação da linha nodal. O nó 8 é considerado um **Nó Móvel**. Daí, em

todo ponto ξ' ocupado por este nó na linha nodal, o valor nodal será igual ao valor da função $\Omega(\xi')$ no ponto em questão.

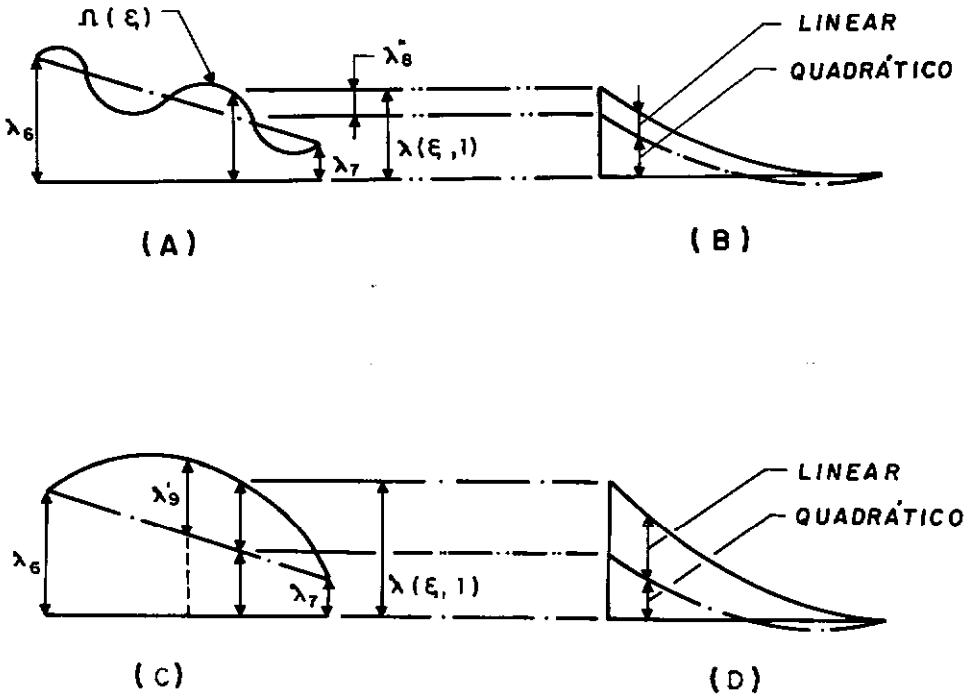


Figura II.9 - Variações da Função λ

A função de interpolação $\Lambda(\xi, \eta)$ é então a variação da função $\Omega(\xi)$ ao longo do domínio do elemento. Fazendo-se $\eta = 1$, a expressão (II.20) representa a função no contorno superior, podendo-se notar facilmente que esta expressão se anula para os pares de valores ξ e η que correspondem aos pontos nodais do elemento.

Depois de estabelecidas as funções de interpolação N_i para o elemento de transição, sua geometria, como já foi citada, será definida pela mesma expressão do elemento de

casca geral. Neste caso, porém, deve ser notado que a coordenada θ_1 do nó móvel varia em função de ξ e é dada por:

$$\theta_8 = \frac{1 - \xi}{2} \theta_6 + \frac{1 + \xi}{2} \theta_7 \quad (\text{II.25})$$

Os deslocamentos são expressos para os pontos nodais da mesma maneira que os do elemento de casca geral (três translações e duas rotações). Já para a linha nodal, os graus de liberdade são os mesmos do elemento axissimétrico: u_{ϕ_1} , u_{θ_1} , u_{n_1} , α_1 e β_1 . Assim, utilizando-se o desenvolvimento em Série de Fourier (Expressões II.3 e II.4) para a linha nodal e a expressão II.17 para os pontos nodais, chega-se ao campo de deslocamentos para o elemento de transição:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^5 N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^5 N_i \zeta \frac{t_i}{2} T_{1i} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} + \\ &\sum_j \sum_{i=6}^8 N_i T_{1i} \left(\tilde{\theta}_1^j \begin{Bmatrix} u_{\phi}^j \\ u_{\theta}^j \\ u_n^j \end{Bmatrix} + \hat{\tilde{\theta}}_1^j \begin{Bmatrix} \hat{u}_{\phi}^j \\ \hat{u}_{\theta}^j \\ \hat{u}_n^j \end{Bmatrix} \right) + \\ &\sum_j \sum_{i=6}^8 N_i \zeta \frac{t_i}{2} T_{1i} \left(\tilde{\theta}_{1i}^j \begin{Bmatrix} \alpha^j \\ \beta^j \end{Bmatrix} + \hat{\tilde{\theta}}_{1i}^j \begin{Bmatrix} \hat{\alpha}^j \\ \hat{\beta}^j \end{Bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Sendo que as duas últimas parcelas correspondem à contribuição da linha nodal. Nestas parcelas relativas à contribuição da linha nodal, os segundos termos estão relacionados com os deslocamentos antimétricos, da mesma forma que ocorria no elemento axissimétrico. As matrizes \tilde{T}_1 e \tilde{T}_{11} são as obtidas no apêndice 2.

Deve-se ser observado que as matrizes θ_1^j , $\hat{\theta}_1^j$, θ_{11}^j e $\hat{\theta}_{11}^j$, mostradas na equações II.5 a II.8, são colocadas agora em função das coordenadas θ_1 dos sub-nós, sendo, portanto, valores nodais.

Uma vez definida a geometria e os deslocamentos, o restante do desenvolvimento segue os mesmos passos já aplicados aos elementos de casca axissimétrica e geral.

Com a matriz elástica \tilde{D}' e as componentes de deformação (Expressões II.11 e II.18), pode-se, depois de um longo trabalho algébrico, chegar-se à matriz \tilde{B}' . Esta matriz \tilde{B}' (referência [4]) tem a contribuição dos valores nodais e dos harmônicos do deslocamento em Série de Fourier para a linha nodal.

$$\tilde{B}' = [\tilde{B}'_1 \quad \tilde{B}'_2 \quad \tilde{B}'_3 \quad \tilde{B}'_4 \quad \tilde{B}'_5 \quad \dots \quad \tilde{B}'_j] \quad (\text{II.27})$$

onde o sub-índice j corresponde a quantidade de harmônicos utilizados na Série de Fourier.

A integração da expressão (II.19) para a obtenção da matriz de rigidez do elemento de transição é a mesma feita no item anterior para o elemento de casca geral.

CAPÍTULO III

Modelo de Linha de Molas

III.1 - INTRODUÇÃO :

Em qualquer projeto estrutural, a determinação da forma final da geometria e dimensões da estrutura a ser construída, além do material a ser empregado, são fatores importantes para que essa estrutura trabalhe satisfatoriamente quando submetida a determinados carregamentos e condições ambientais. Para atingir esse objetivo são necessários cuidados diversos que passam por uma previsão de falhas que podem ocorrer durante a vida útil de uma dada estrutura. O aparecimento de trincas é uma dessas falhas.

A mecânica da fratura se desenvolve com base no estudo dos efeitos das cargas aplicadas, geometria e condições ambientais sobre o processo de trincamento em um sólido qualquer. Ela está ligada ao campo da metalurgia e, em seu estudo mais aprofundado, é imprescindível que se leve em conta as propriedades intrínsecas do material. Este trabalho, contudo, limita-se a analisar os efeitos da fratura, preocupando-se somente com seus aspectos macroscópicos e, desta forma, estudando as teorias baseadas nas noções da mecânica dos sólidos contínuos.

Neste capítulo será focado o problema de análise de

trincas não-passantes através de um modelo de linha de molas contínuas, desenvolvido inicialmente por RICE e LEVY [5] e melhorado e aplicado por diversos outros pesquisadores como DELALE e ERDOGAN [8 , 9], que utilizam o modelo inicial introduzindo a teoria de Reissner para a flexão, e GERMAN et all [10 ,11] que estabeleceram a matriz de rigidez para o modelo e a implementaram no sistema ADINA. Além disso, será também efetuada uma abordagem geral em outros aspectos como os modos e o deslocamento de abertura da fratura.

III.2 - CONCEITOS GERAIS:

A origem da mecânica da fratura se deu em 1913 através de um estudo de INGLIS [12]. Ele chegou a conclusão, analisando o caso de uma chapa submetida à uma tensão uniforme σ com furo elíptico (Figura III.1) que a máxima tensão ocorre no ponto onde o raio de curvatura é mínimo. Esta tensão é dada por

$$\sigma_{y_{max}} = \sigma (1 + 2a/b) \quad (III.1)$$

Assim, na extremidade do furo, quando o b tende a zero, as tensões se tornariam infinitas. Neste caso, como determinado material só pode suportar tensões finitas, um corpo trincado não suportaria nenhuma carga e isso, como se sabe, não é verdade.

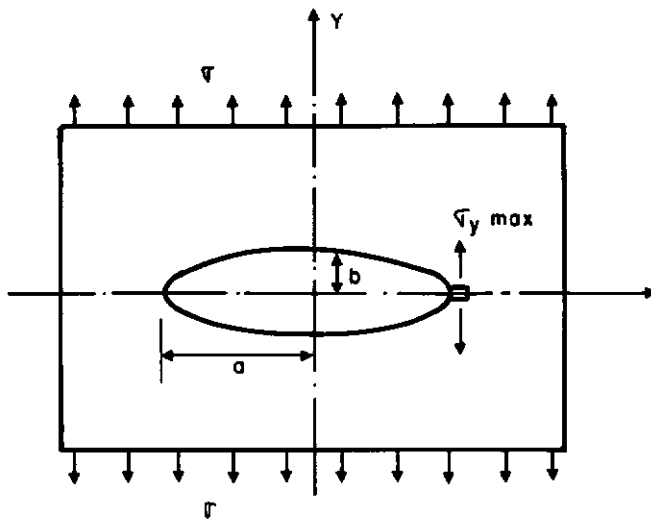


Figura III.1 - Chapa sob Tensão σ com Furo Elíptico

TENSÕES OU DESLOCAMENTOS
PRESCRITOS NA SUPERFÍCIE

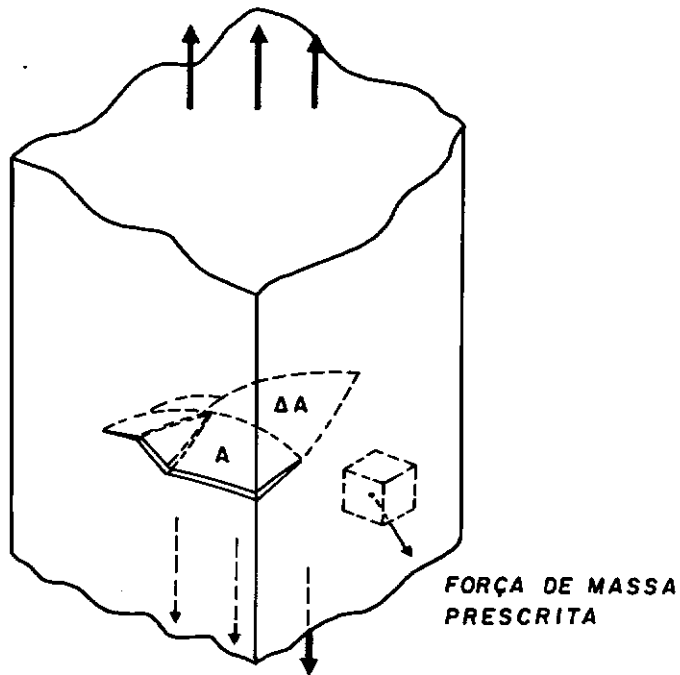


Figura III.2 - Crescimento da Fratura em um Corpo Elástico

Seguindo o desenvolvimento da mecânica da fratura, o trabalho de GRIFFITH [13] estudando um vidro concluiu que a trinca ocorria quando a área da superfície, A , de um corpo sob carregamento (Figura III.2) crescia para uma área de $A + \Delta A$ quando o decréscimo na energia potencial U excedia o acréscimo na energia W de superfície devido ao aumento da área da superfície trincada. Assim, chega-se a um valor crítico determinado por

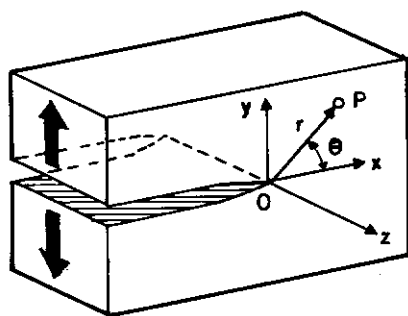
$$\frac{\partial}{\partial a} (W + U) = 0 \quad (\text{III.2})$$

que torna a fratura instável.

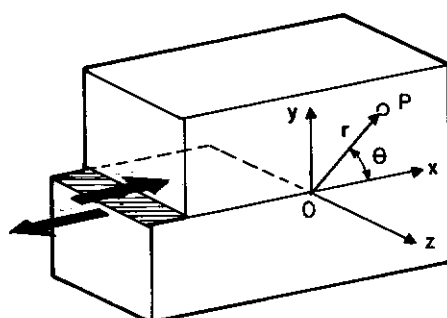
IRWIN [14] introduziu a classificação das maneiras pelas quais a fratura pode acontecer. Estes modos, representados por três movimentos cinemáticos independentes, estão mostrados na Figura III.3 e se dividem em:

MODO I - MODO DE ABERTURA - As superfícies são separadas na direção y , apresentando deformações simétricas em relação aos planos $x-z$ e $x-y$.

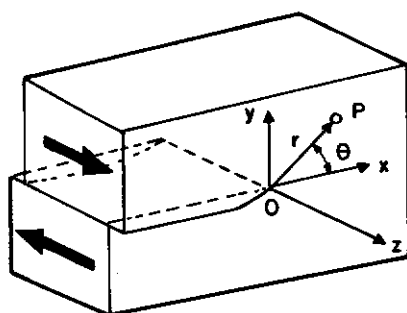
MODO II - MODO CISALHANTE - As superfícies deslizam uma sobre a outra na direção x com as deformações em relação ao plano $x-y$ sendo simétricas e em relação ao plano $x-z$ sendo anti-simétricas.



MODO I - ABERTURA - $K_{II} = K_{III} = 0$



MODO II - CORTANTE - $K_I = K_{III} = 0$



MODO III - RASGAMENTO - $K_I = K_{II} = 0$

Figura III.3 - Modos de Fratura

MODO III - MODO DE RASGAMENTO - As superfícies deslizam uma sobre a outra na direção z e as deformações são anti-simétricas em relação aos planos $x-y$ e $x-z$.

Surge neste ponto um coeficiente, também introduzido por IRWIN, que representa a energia disponível na trinca por unidade de comprimento, relacionando como se encontra a propagação da trinca comparada à resistência a fratura do material. Este coeficiente, chamado de Fator de Intensidade de Tensões, se relaciona com as componentes de tensões para cada modo de fratura na região vizinha ao "Crack-Tip", como:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} f_1(\theta) \quad (\text{III.3})$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} f_2(\theta) \quad (\text{III.4})$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} f_3(\theta) \quad (\text{III.5})$$

onde θ e r estão mostradas na Figura III.4.

$f_i(\theta)$ representa uma função da geometria dependente apenas do ângulo θ e K_I , K_{II} e K_{III} são os fatores de intensidade de tensões correspondentes aos três modos, que podem ser superpostos para uma representação apropriada dos três casos.

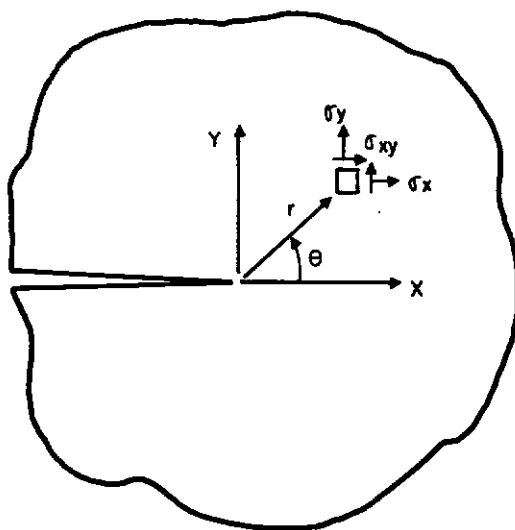


Figura III.4 - Coordenadas r e θ

O valor crítico para K_I , K_{II} e K_{III} , designado por K_c é chamado Fator de Intensidade de Tensões Crítico e representa a resistência à fratura do material. Os valores K_I , K_{II} e K_{III} não devem exceder K_c para que não haja uma propagação súbita da fratura e a estrutura permaneça estável.

Os valores de K_c são uma característica de cada tipo de material e devem ser determinados experimentalmente. Pode-se encontrar na literatura valores tabelados para o K_c para diversos tipos de materiais.

Outro parâmetro importante é a energia disponível para criar uma superfície trincada unitária. Este parâmetro, G , representa a quantidade de energia de deformação dissipada

na fratura e relaciona-se com o Fator de Intensidade de Tensões em cada modo como [15] :

$$G_I = \frac{1 + k}{8 \mu} K_I^2 \quad (\text{III.6})$$

$$G_{II} = \frac{1 + k}{8 \mu} K_{II}^2 \quad (\text{III.7})$$

$$G_{III} = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (\text{III.8})$$

Com $k = 3 - 4\nu$ para o estado plano de deformação e $k = \frac{3 - \nu}{1 - \nu}$ para o estado plano de tensão. Os valores μ e ν são, respectivamente, o Módulo de Elasticidade Transversal e o coeficiente de Poisson.

Generalizando, a energia de deformação dissipada nos três modos de fratura é, portanto

$$G_T = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (\text{III.9})$$

É oportuno neste ponto definir outro coeficiente que auxilia na avaliação do crescimento da trinca. Esse coeficiente é utilizado para calcular a energia dissipada quando ocorre a propagação da trinca [16]. RICE, utilizando o teorema de conservação de energia, provou que a integral

$$J = - \frac{\partial U}{\partial a} \quad (\text{III.10})$$

em um contorno parcial contendo o Crack-Tip representa a taxa de energia dissipada por comprimento de fratura. O valor U é a energia potencial, enquanto que a é o comprimento da trinca.

A integral parcial da expressão (III.10) é conhecida como Integral J e no caso de um regime elástico linear iguala-se ao valor de G

$$G = J \quad (\text{III.11})$$

Analogamente ao que acontece com o Fator de Intensidade de Tensões, a Integral J apresenta também um valor crítico, J_c , característico do material e que serve para avaliar como se encontra a estabilidade da fratura.

É possível estabelecer outro critério para a avaliação do crescimento da fratura, o Deslocamento de Abertura da Fratura. O C.O.D. (Crack Opening Displacement), ilustrado na Figura III.5, é definido como

$$\text{C.O.D.} = \frac{4 \sigma}{E} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (\text{III.12})$$

Esse parâmetro, entretanto, apresenta limitações pois, na prática, não pode ser medido com precisão [15].

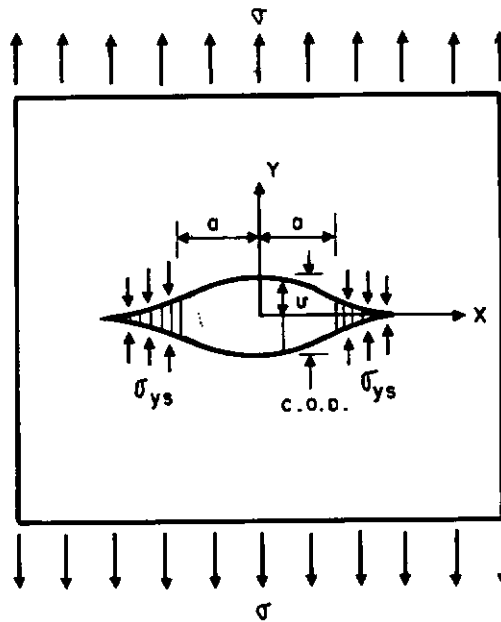


Figura III.5 - C.O.D.

III.3 - VANTAGENS DO MODELO DE LINHA DE MOLAS

O modelo de linha de molas , L.S.M. (Line-Spring Model), é utilizado, basicamente, na análise de superfícies trincadas de placas e cascas. Esta análise representa um dos mais importantes problemas no estudo da integridade estrutural de vários componentes de aplicação na engenharia.

Em sua forma geral, o estudo de propagação de trincas, principalmente trincas não-passantes, mesmo em estruturas de superfícies, deve ser tratado como um problema de fratura tridimensional, onde a perturbação do campo de

tensões pela fratura interage fortemente com a superfície do sólido. Assim, mesmo em se tratando de uma análise linear, o estudo analítico do problema é algo praticamente inviável, a não ser para problemas específicos e, invariavelmente, muito simples . Consequentemente, a solução destes problemas passa para algum tipo de análise numérica. Alguns procedimentos empregados para solucionar os problemas acima descritos baseiam-se no Métodos dos Elementos Finitos e Métodos dos Elementos de Contorno, além de outras técnicas alternativas. Tais procedimentos, embora conduzam a resultados precisos, recaem em tratamentos tridimensionais completos que, além de serem dispendiosos computacionalmente, requerem um trabalho exaustivo para a modelagem.

Foi com o intuito de tornar mais simples e eficiente a análise de placas e cascas com trincas não-passantes que RICE e LEVI [1, 17] introduziram um conceito de uma linha de molas que, formada por elementos escalares discretos, reduziria o problema tridimensional da análise de trinca para uma solução bidimensional, compatível com o uso em placas e cascas. Com isso, eles conseguiram estabelecer uma solução que embora se apresente econômica no ponto de vista computacional e de simples implementação numérica, conduz a resultados que têm um adequado grau de precisão em se tratando de problemas de engenharia.

O modelo sugerido apresenta ainda a vantagem de que a análise pode ser efetuada para qualquer forma em que se

encontre a fratura, podendo a mesma ter profundidade variável. Além disso, a análise do crescimento da fratura pode ser executada em qualquer direção e essa propagação pode se dar tanto na superfície externa quanto na interna da estrutura.

As vantagens acima citadas serão abordadas mais detalhadamente nos próximos itens.

III.4 - DESENVOLVIMENTO DO MODELO DE LINHA DE MOLAS

Em placas e cascas que contenham fraturas parciais (não-passantes) e sujeitas a esforços normais e de momentos, a parte remanescente da estrutura que permanece ligada na fratura deve ser levada em conta já que ela ainda é capaz de absorver e transmitir esforços.

A idéia básica concebida por RICE e LEVY na idealização do L.S.M. consiste em aproximar um problema de fratura tridimensional a um problema de fratura quasi-bidimensional através da redução das tensões da ligação remanescente para a superfície média da placa ou casca como um esforço normal N e um momento fletor M , passando assim a se trabalhar na teoria de cascas finas.

O modelo inicialmente concebido foi feito com base nas teorias clássicas de KIRCHHOFF para placas e cascas. Em desenvolvimentos mais recentes, como já foi citado na introdução deste capítulo, foram empregadas formulações

baseadas nas teorias de REISSNER que levavam em conta o efeito de deformações cisalhantes. Todo esse aprimoramento das técnicas resultou em soluções mais compatíveis com soluções tridimensionais completas e deram uma maior confiabilidade ao L.S.M., como pode ser visto na referência [18].

O modelo que representa a linha de molas encontra-se ilustrado na Figura III.6. Ela mostra uma placa com dimensões infinitas e espessura t carregada com remotas tensões normais σ_{∞} e de flexão m_{∞} . A placa possui uma trinca não-passante de comprimento $2l$ e profundidade variável $a(x)$. A profundidade máxima da trinca é de a_0 no ponto $x = y = 0$. A trinca não-passante é simulada como uma trinca total com uma linha de molas que liga as faces da trinca em pontos discretos.

O funcional de energia potencial para estruturas com trinca não-passantes pode ser visto nas referências [5, 17, 18] e é de difícil solução analítica, sendo, então, necessário a integração por um método aproximado como o dos Elementos Finitos.

Por causa da porção não trincada $(t - a(x))$ na configuração real do problema, a aproximação bidimensional deve levar em conta a transmissão do esforço normal $N(x)$ e do momento fletor $M(x)$ locais através das faces trincadas, resultando em um deslocamento $\delta(x)$ e uma rotação $\theta(x)$ referidos ao plano médio da placa.

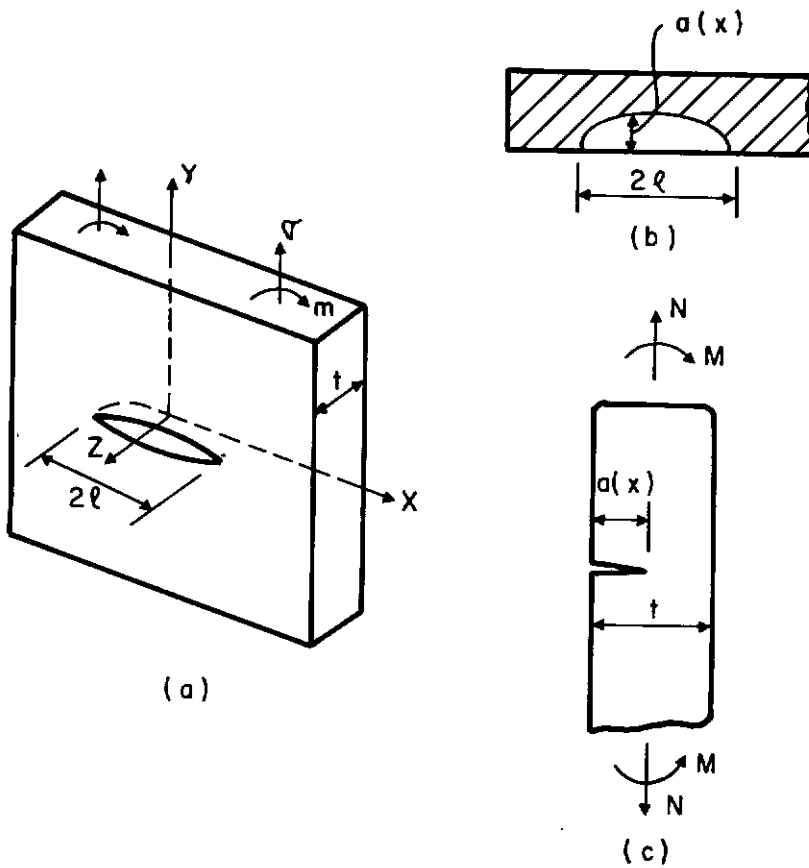


Figura III.6 - L.S.M. - Geometria da placa Fraturada

Os esforços $N(x)$ e $M(x)$, analisando o caso de uma fatia de placa com largura igual a profundidade da placa (casca) e comprimento da fratura igual a profundidade da fratura no ponto em questão (Fig. III.6.c) de acordo com [5, 8, 18] são

$$h\delta = A_{tt}\sigma + A_{tf}m \quad (\text{III.13})$$

$$\frac{h^2 \theta}{6} = A_{ft} \sigma + A_{ff} m \quad (\text{III.14})$$

onde A_{ij} são constantes de reciprocidade elástica e

$$\sigma = \frac{N}{h} \quad (\text{III.15.b})$$

$$m = \frac{6M}{h^2} \quad (\text{III.15.b})$$

Seguindo-se o desenvolvimento como indicado em [18], de acordo com [8], chega-se a

$$K_I = h^{1/2} (\sigma g_t + m g_f) \quad (\text{III.16})$$

com g_t e g_f sendo funções de forma válidas para $0 < l/h \leq 0.8$ e estando mostradas no apêndice 3 .

Da expressão de G para o regime elástico-linear,

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K^2 \quad (\text{III.17})$$

Vem

$$\begin{aligned}
 G &= h \frac{1 - \nu^2}{E} (\sigma^2 g_t^2 + 2\sigma m g_t g_f + m^2 g_f^2) \\
 &= \frac{1}{2} [\sigma \frac{\partial}{\partial L} (h\delta) + m \frac{\partial}{\partial L} (-\frac{h^2 \theta}{6})] \quad (\text{III.18})
 \end{aligned}$$

Daí, obtem-se:

$$\delta(x) = \frac{2(1 - \nu^2)h}{E} (\alpha_{tt}\sigma + \alpha_{tf}m) \quad (\text{III.19a})$$

$$\theta(x) = \frac{12(1 - \nu^2)}{E} (\alpha_{ft}\sigma + \alpha_{ff}m) \quad (\text{III.19b})$$

Os valores de α_{ij} , definidos como

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{h} \int_0^1 g_i g_j dl \quad (\text{III.20})$$

onde $i, j = t, f$ e l = profundidade da fratura
estão relatados também no apêndice 3 .

Desenvolvendo-se (III.19a e b) e colocando-se na
forma matricial, tem-se:

$$\tilde{D} = \tilde{C} \tilde{P} \quad (\text{III.21})$$

onde

$$\tilde{D} = \left\{ \begin{array}{c} \delta(x) \\ \theta(x) \end{array} \right\}$$

$$\tilde{C} = \frac{1 - \nu^2}{E} \begin{bmatrix} h\alpha_{tt} & 6\alpha_{tf} \\ 6\alpha_{tf} & \frac{36}{h}\alpha_{ff} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P} = \left\{ \begin{array}{c} N(x) \\ M(x) \end{array} \right\}$$

A matriz \tilde{C} é a matriz dos coeficientes de reciprocidade, sendo assim ela representa uma matriz de flexibilidade da linha de molas ao longo da fratura.

Depois de obtida a matriz de flexibilidade, o próximo passo é proceder algumas transformações, de sorte que essa matriz possa ser usada em um programa de elementos finitos para cascas.

Assim, adotando-se o Método dos Elementos Finitos modelo de deslocamentos, é necessário inverter a matriz \tilde{C} , obtendo-se a matriz de rigidez \tilde{S} , como segue

$$\tilde{P} = \tilde{S} \tilde{D} \quad \text{com} \quad \tilde{S} = \tilde{C}^{-1} \quad (\text{III.22a})$$

ou seja

$$\begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(x) & S_{12}(x) \\ S_{21}(x) & S_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.22b})$$

onde

$$\tilde{S} = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \frac{1}{(\alpha_{tt} \alpha_{ff} - \alpha_{ft}^2)} \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{ff}}{h^2} & \frac{-\alpha_{tf}}{6h} \\ \frac{-\alpha_{tf}}{6h} & \frac{\alpha_{tt}}{36} \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

A linha de molas se acopla com o elemento finito de cascas através dos nós ao longo do comprimento da trinca e cada elemento (mola) tem um comprimento efetivo W_e associado a ele. Este comprimento efetivo é determinado com relação a funções de interpolação através de uma integração ao longo da fratura. Logo, observando-se a Figura III.7 o comprimento W_e é dado, para o elemento de casca geral utilizado no programa, como

$$W_e = \begin{cases} 2/3 \cdot l_1 & \text{Nós do meio do lado (nó A)} \\ 1/6 (l_1 + l_2) & \text{Nós de canto, entre elementos (nó B)} \\ 1/6 \cdot l_2 & \text{Nó de canto, no fim da trinca (nó C)} \end{cases}$$

A matriz de rigidez \tilde{S} da equação (III.23) fica então multiplicada por W_e .

Deve-se agora fazer uma generalização na relação entre forças e deslocamentos do elemento de linha de molas conforme dada na equação (III.22), já que, da maneira que está representada, ela se encontra no sistema local de coordenadas e a fratura, porém, pode ocorrer em qualquer direção com relação ao referencial global no qual a estrutura se localiza. O procedimento, então, é passar do referencial local da linha de molas (Figura III.8) para o referencial global do elemento de casca geral (Figura II.5).

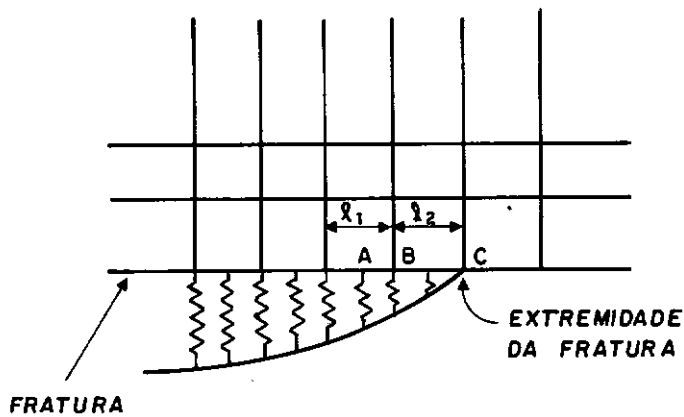


Figura III.7 - Acoplamento do L.S.M. com o Elemento Finito

Reescreve-se agora a equação (III.22) com respeito ao sistema local r , s e t

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ M_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_s \\ \theta_r \end{Bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

onde N_s e δ_s são força e deflexão na direção s e

M_r e θ_r são momento e rotação sobre r .

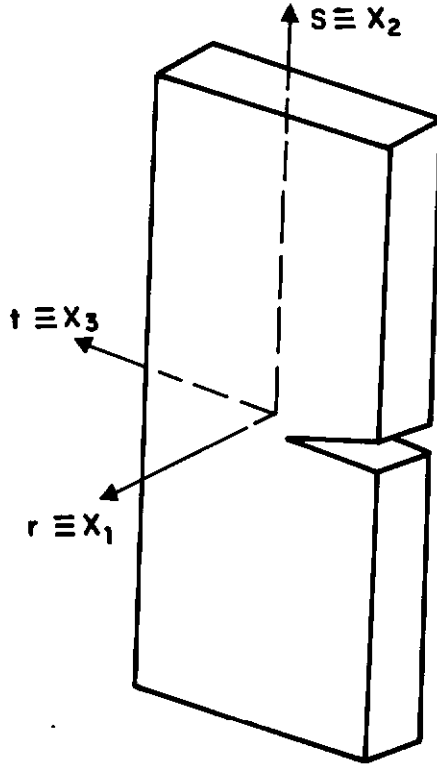


Figura III.8 - Sistema Local (r,s,t) da Fratura

Como já foi citado no capítulo anterior, o elemento degenerado de casca geral apresenta componentes de força e deflexão definidas no sistema global de coordenadas x, y, z e apresenta momentos e rotações relacionados ao sistema local da casca.

Sendo $\tilde{U} = (u, v, w)$ o vetor de deflexões global, a magnitude das deflexões na direção do eixo local s é

$$\delta_s = \tilde{S} \tilde{U} \quad (\text{III.25})$$

onde \tilde{S} é a matriz de transformação de coordenadas análoga a matriz \tilde{T}_1 obtida no apêndice 2 .

As rotações são α e β e são dadas nos eixos locais da casca V_1 e V_2 , daí formando-se um vetor de rotação

$$\tilde{\theta} = \alpha \tilde{V}_1 + \beta \tilde{V}_2 \quad (\text{III.26})$$

que sobre o eixo r , fica

$$\theta_r = \tilde{r} \tilde{\theta} = \theta_1 \tilde{r} \tilde{V}_1 + \theta_2 \tilde{r} \tilde{V}_2 \quad (\text{III.27})$$

Com isso a relação entre os deslocamentos locais da mola e os deslocamentos globais é

$$\begin{Bmatrix} \delta_s \\ \theta_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & S_y & S_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{r} \tilde{V}_1 & \tilde{r} \tilde{V}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

Da mesma forma obtêm-se o vetor de forças e chega-se a expressão final da matriz de rigidez no sistema global:

$$\tilde{S}_G = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ S_y & 0 \\ S_z & 0 \\ 0 & \tilde{r} \tilde{V}_1 \\ 0 & \tilde{r} \tilde{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & S_y & S_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{r} \tilde{V}_1 & \tilde{r} \tilde{V}_2 \end{bmatrix}$$

$$(\text{III.29})$$

ou

$$\tilde{S}_G = \tilde{R}^T \tilde{S} \tilde{R} \quad (\text{III.30})$$

onde \tilde{S}_G é a matriz de rigidez global

\tilde{S} é a matriz de rigidez local

\tilde{R} é a matriz de rotação do elemento de linha de molas

Deve ser observado que no Modo I os deslocamentos da linha de molas são simétricos em relação ao plano da trinca e deflexões medidas são dadas por $\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{2}v$, $\frac{1}{2}w$, $\frac{1}{2}\alpha$ e $\frac{1}{2}\beta$. Desde que esse elemento não tenha tamanho físico, funcionando como uma mola, a matriz de rigidez \tilde{S}_G deve ser multiplicada por 2 se fratura estiver sobre o eixo de simetria da estrutura.

Determinada \tilde{S}_G , para que seja concluído o desenvolvimento, esta deve ser adicionada a matriz de rigidez global da estrutura, nas posições apropriadas, para que forme o sistema de equações do método dos deslocamentos.

Concluindo o cálculo dos deslocamentos, a determinação do fator de intensidade de tensões e da integral J é efetuada no sistema local de coordenadas. Com auxílio da equação (III.28) encontra-se δ_s e θ_r .

Com esses valores determina-se as forças nodais N_s e M_r e daí, o valor de K_I (equação III.16)

$$K_I = h^{1/2} (\sigma g_t + m g_f)$$

onde
$$\sigma = \frac{N_s}{h W_e} \quad e \quad m = \frac{6 M_r}{h^2 W_e}$$

e por (III.17) chega-se ao valor de J_I

$$J_I = K_I^2 \left(\frac{1 - \nu^2}{E} \right)$$

Além desses dois parâmetros pode-se calcular o valor de C.O.D. conforme a equação (III.12).

Neste ponto uma consideração importante a ser feita diz respeito ao fato que o desenvolvimento anterior se preocupa somente com o Modo I de fratura. Um comentário a respeito dos demais modos é feito a seguir, utilizando os resultados do trabalho da referência [19].

Caso se queira levar em consideração os Modos II e III, deve-se agora analisar a fatia de casca submetida aos esforços indicados na Figura III.9. Desta forma a matriz (III.21) fica

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \Delta t \\ \Delta r \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ \text{Sim.} & & & C_{44} & C_{45} \\ & & & & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \\ V \\ Q \\ T \end{Bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

onde δ , θ , N e M são os mesmos deslocamentos e esforços previamente definidos e

Δt = deslizamento das faces trincadas

Δr = deslocamento por rasgamento das faces trincadas

ϕ = rotação por rasgamento das faces trincadas

V = esforço cortante ou cisalhante

Q = esforço de rasgamento

T = esforço torsor

Depois de efetuado o equilíbrio de esforços da fatia de casca da Figura III.9, chega-se a

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \Delta t \\ \Delta r \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & & C_{44} & C_{45} \\ & & & & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \\ V \\ Q \\ T \end{Bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

De maneira semelhante a ocorrida com a equação III.21, invertendo-se a equação III.32 obtém-se a matriz de rigidez da linha de molas

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ V \\ Q \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & & S_{44} & S_{45} \\ & & & & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \Delta t \\ \Delta r \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

Os valores para S_{11} , S_{12} , S_{21} e S_{22} são os mesmos estabelecidos anteriormente já que os mesmos não apresentam acoplamento com os demais termos de rigidez acrescentados.

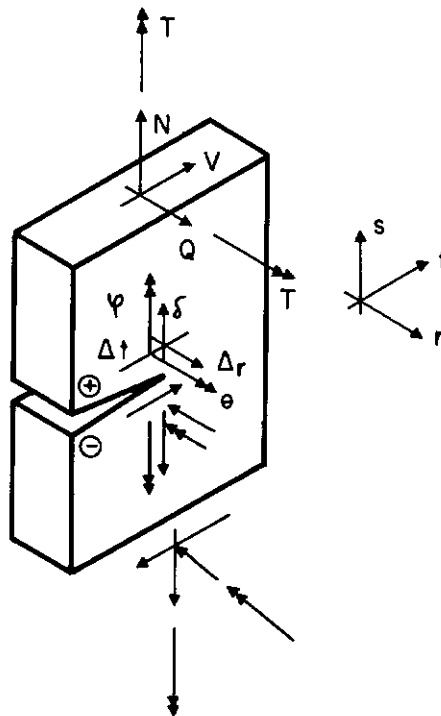


Figura III.9 - Placa em Estado Plano de Deformações

Para a determinação dos coeficientes adicionais de flexibilidade da equação (III.31), recorre-se mais uma vez ao coeficiente de energia potencial dissipada na fratura,

G , aplicado agora aos três modos (equação III.9)

$$G = \frac{K_I^2}{E} + \frac{K_{II}^2}{E} + \frac{K_{III}^2}{2G} \quad (\text{III.34})$$

Assim, utilizando os valores de K_{II} e K_{III} (o modo I já foi analisado no início deste item),

$$K_{II} = K_V V \quad (\text{III.35})$$

$$K_{III} = K_Q Q + K_T T \quad (\text{III.36})$$

Chega-se a

$$G = \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{K_V^2 V^2}{E} + \frac{(K_Q Q + K_T T)^2}{2G} \quad (\text{III.37})$$

Os termos K_V , K_Q e K_T das equações (III.35) e (III.36) são funções que estão relacionadas com o tipo de carregamento e são dependentes da relação a/t (profundidade da trinca/espessura da placa) e podem ser encontradas na referência [20].

Usando o teorema de CASTIGLIANO, tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \Delta t \quad (\text{III.38})$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \Delta r \quad (\text{III.39})$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \phi \quad (\text{III.40})$$

Derivando com relação a profundidade a , segue

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right) = \frac{\partial \Delta t}{\partial a} \quad (\text{III.41})$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right) = \frac{\partial \Delta r}{\partial a} \quad (\text{III.42})$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial a} \quad (\text{III.43})$$

Fazendo a derivada de (III.37) com relação a cada esforço, vem

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial a} \right) = \frac{2 K_v^2 V^2}{E} \quad (\text{III.44})$$

$$\frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{\partial U}{\partial a} \right) = \frac{2 (K_Q Q + K_T T) K_Q}{2G} \quad (\text{III.45})$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U}{\partial a} \right) = \frac{2 (K_Q Q + K_T T) K_T}{2G} \quad (\text{III.46})$$

Assim, substituindo (III.41) a (III.43) em (III.44) a (III.46), respectivamente, obtem-se:

$$\Delta t = \int_0^a \frac{2 K_v^2}{E} v \, da \quad (\text{III.47})$$

$$\Delta r = \int_0^a \frac{K_Q^2}{G} Q \, da + \int_0^a \frac{K_Q K_T}{G} T \, da \quad (\text{III.48})$$

$$\phi = \int_0^a \frac{K_Q K_T}{G} T \, da + \int_0^a \frac{K_T^2}{G} T Q \, da \quad (\text{III.49})$$

Dai, consegue-se os valores dos coeficientes de flexibilidade procurados,

ou seja:

$$C_{33} = \int_0^a \frac{2 K_v^2}{E} \, da \quad (\text{III.50})$$

$$C_{44} = \int_0^a \frac{K_Q^2}{G} \, da \quad (\text{III.51})$$

$$C_{45} = \int_0^a \frac{K_Q K_T}{G} \, da \quad (\text{III.52})$$

$$C_{55} = \int_0^a \frac{K_T^2}{G} T \, da \quad (\text{III.53})$$

Com os valores acima, a matriz de rigidez para a linha de molas fica estabelecida para os Modos II e III. Como o

Modo I já havia sido determinado, a matriz da equação (III.33) fica completa e a análise pode incluir a contribuição dos três modos na propagação da trinca.

CAPÍTULO IV

Implementação Computacional

IV.1 - INTRODUÇÃO :

O objetivo deste trabalho é estabelecer um procedimento eficiente para uma análise da propagação de trincas não passantes em cascas axissimétricas utilizando o Método dos Elementos Finitos, conforme comentado no capítulo I. Para que se consiga esse objetivo é necessário uma implementação computacional adequada, procurando desenvolver um sistema que utilize uma formulação efetiva e com a eficiência desejada.

Basicamente as seguintes etapas são efetuadas para a análise de um problema:

- a) Entrada de Dados
- b) Montagem do sistema de equações
- c) Solução do sistema de equações
- d) Cálculo dos parâmetros para estudo da fratura
- e) Saída dos resultados

No presente capítulo será apresentada a organização geral da implementação computacional, dando especial atenção a entrada de dados. O ambiente de trabalho, os recursos disponíveis para o pós-processamento além de outros aspectos importantes nesta etapa de implementação.

É oportuno ressaltar aqui que este trabalho foi

desenvolvido utilizando-se o sistema CRILO [4] e sobre ele modificando algumas rotinas e acrescentando outras, basicamente aquelas que tratam da implementação do Modelo de Linhas de Molas. Sendo assim, durante a apresentação deste capítulo a referência [4] será citada como fonte de consulta para melhor compreensão do sistema.

Outra modificação importante no sistema original consiste no armazenamento de todos os "Arrays" em um único vetor de trabalho, sendo que um conjunto de apontadores indica a posição de cada variável dentro deste vetor. Com isso, consegue-se uma utilização bastante racional da memória, com os dados ocupando exatamente o espaço necessário para sua alocação.

IV.2 - Organização geral do sistema computacional :

O sistema computacional implementado se constitui primordialmente de sete módulos. Cada um desses módulos é responsável por uma etapa diferente do programa e é formado por diversas rotinas. O diagrama de blocos da Figura IV.1 dá uma idéia de como estão dispostas as várias rotinas de cada módulo. A seguir será feita uma abordagem geral e sucinta dos módulos componentes do sistema, enfatizando as modificações efetuadas na versão original utilizada.

a) Entrada de Dados Gerais e da Estrutura :

Este módulo se encarrega da entrada de dados gerais e

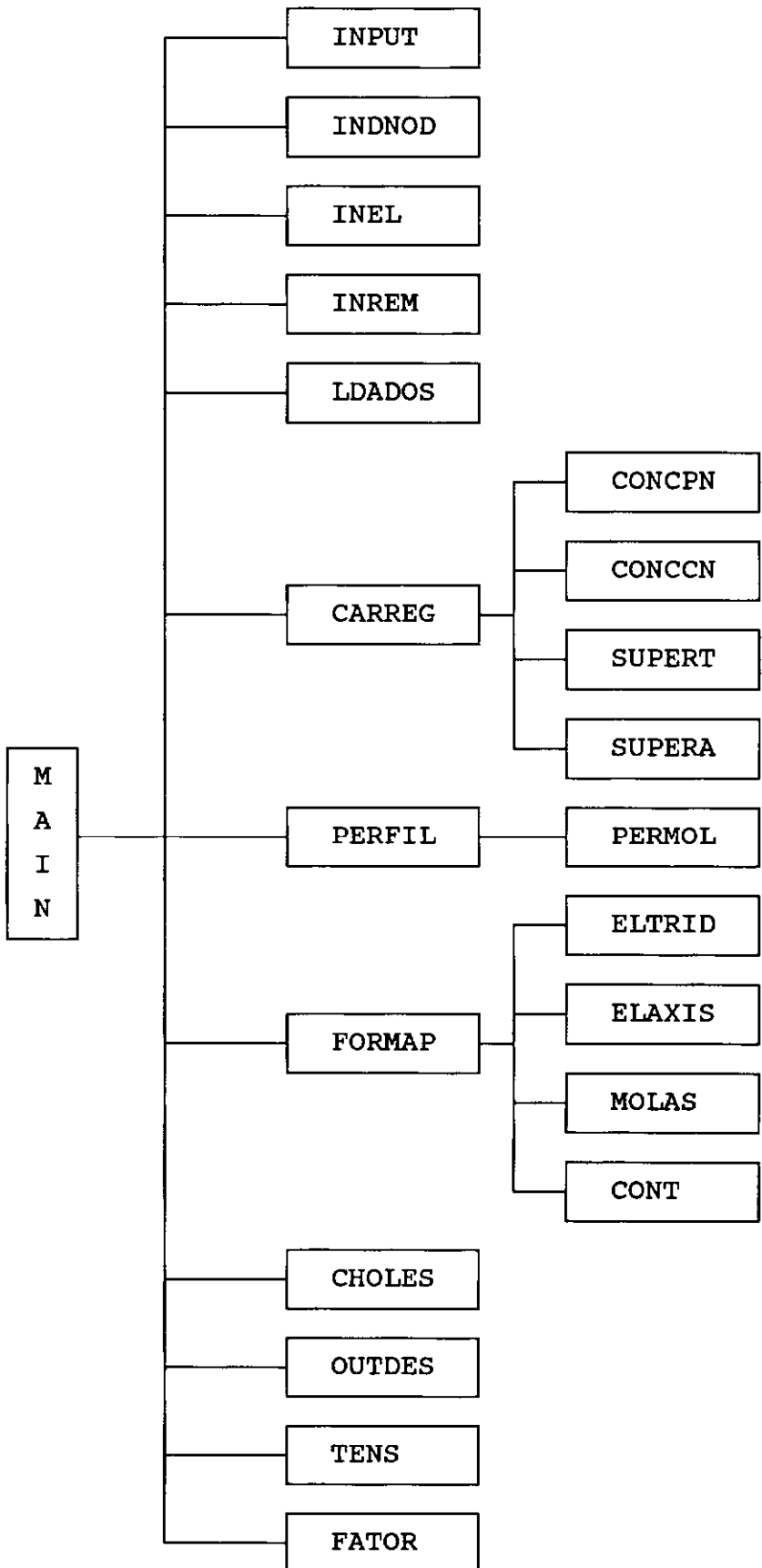


Figura IV.1

da estrutura. É neste módulo que se fornece o número de nós e de elementos, assim como as coordenadas nodais, vetor espessura, incidência e tipo dos elementos, condições de contorno e as constantes físicas (módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson), dados necessários para a definição geométrica e física da estrutura a ser analisada. Foi neste módulo que foram introduzidos os dados da linha de molas. Estes dados compreendem a quantidade de molas, a posição da trinca (externa ou interna), a incidência das molas e a profundidade de cada uma delas. No final do módulo é impresso, opcionalmente, um relatório descritivo mostrando os dados introduzidos para uma eventual conferência por parte do usuário.

A linguagem utilizada para a entrada de dados no sistema é composta por grupos de comandos que se formam basicamente de números (reais e inteiros) e palavras-chave. Desta forma se consegue um esquema de linguagem orientada que facilita a entrada, manipulação e geração de dados da estrutura a ser analisada. A descrição dos comandos empregados no sistema se encontram na referência [4].

Com a introdução da análise de propagação de trincas, novos comandos foram criados e adicionados a versão original do sistema CRILO e são mostrados a seguir:

- No primeiro grupo dito OPCOES caso se deseje analisar trincas, acrescenta-se o comando MOLA

- Após a introdução do comando que define o número de condições de contorno, carregamentos, harmônicos e ângulos para impressão de resultados, acrescenta-se agora

— MOLA \rightarrow $\langle i_1 \rangle \rightarrow$ FRATURA $\begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \begin{array}{l} \text{SIMETRICA} \\ \text{EXTERNA} \\ \text{INTERNA} \end{array} \rightarrow$

onde : i_1 = número de molas.

- O último comando adicionado, após os ângulos, para a impressão de resultados, são as incidências e profundidade das molas. Inicia-se com o comando

— MOLAS \longrightarrow

Abaixo deste comando coloca-se

$\langle i_1 \rangle \longrightarrow \langle i_2 \rangle \begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \begin{array}{l} \langle i_3 \rangle \\ \langle r_1 \rangle \end{array}$

onde : i_1 = número da mola

i_2 = incidência 1 da mola

i_3 = incidência 2 da mola (só é necessária em caso de fratura não-simétrica)

r_1 = profundidade da mola.

b) Entrada de dados de carregamento e formação do vetor de cargas nodais equivalentes \underline{P} :

Se constitui em outro módulo de entrada de dados,

agora se preocupando com o carregamento e posterior montagem do vetor de cargas nodais equivalentes. Os casos de carregamentos que podem ser aplicados são cargas concentradas sobre pontos nodais; cargas aplicadas nos harmônicos sobre os círculos nodais; cargas distribuídas sobre a superfície dos elementos e peso próprio. Com os valores estabelecidos o usuário tem a opção da impressão de um espelho para uma eventual conferência de dados.

Depois de definidos os valores de carregamentos, é efetuado o cálculo do vetor de cargas nodais equivalentes. Novamente é utilizado o esquema de linguagem orientada do módulo anterior para a leitura, manipulação e geração dos dados. Esses comandos estão explicitados na referência [4].

É válido salientar que em toda a entrada de dados existe um interpretador para que seja feita uma crítica na consistência dos dados introduzidos, detectando e apontando os erros que por ventura tenham ocorrido nesses módulos. Os erros encontrados são apontados através de um arquivo de acesso direto que contém todos os tipos de erros.

c) Montagem da matriz de rigidez global \tilde{K} :

Na montagem da matriz de rigidez global são incorporadas as matrizes de rigidez dos três tipos de elementos, mostrados no capítulo II, e da linha de molas deduzida no capítulo III. Este módulo é iniciado com a definição de um vetor apontador para a descrição da

topologia do armazenamento da matriz de rigidez global já que no desenvolvimento do sistema CRILO adotou-se a técnica de armazenamento em perfil através do conceito de altura efetiva de coluna. Esta técnica está descrita nas referências [4,21] e apresenta um recurso que é muito importante na resolução de problemas de grande porte que é o particionamento da matriz de rigidez em blocos, permitindo o uso de memória auxiliar e desvinculando o tamanho do problema da memória principal do computador utilizado.

Calculado o vetor apontador e o número de blocos, o próximo passo é o cálculo das matrizes de rigidez para os elementos axissimétricos, de transição e tridimensional geral, conforme visto anteriormente. Estabelecidas as matrizes, elas são espalhadas na matriz de rigidez global de acordo com a incidência de cada elemento.

Neste ponto foram introduzidas rotinas que calculam a matriz de rigidez da linha de molas, considerando o procedimento empregado no capítulo III, conforme a equação (III.30). Assim, uma outra matriz de rigidez a ser espalhada na matriz global é a matriz de rigidez da linha de molas.

O último procedimento deste módulo é a introdução das condições de contorno de acordo com a técnica do número grande em cada bloco da matriz de rigidez global \tilde{K} e nos termos do vetor de cargas nodais equivalentes.

Caso a matriz de rigidez seja armazenada em memória auxiliar, os passos acima descritos são executados para cada bloco e transferidos para a memória auxiliar para então o bloco seguinte ser iniciado. Caso contrário, ou seja, a matriz não necessite ser dividida em blocos, o sistema utilizará somente a memória principal (INCORE), melhorando seu desempenho com a eliminação de operações de entrada e saída (I/O).

d) Resolução do Sistema de Equações :

Com a montagem da matriz \underline{K} e feita a introdução das condições de contorno, o sistema neste módulo resolve o sistema de equações algébricas lineares $\underline{K} \underline{U} = \underline{P}$. O método empregado para a resolução do sistema é o de CHOLESKY adaptado à técnica de armazenamento utilizada [21], operando segundo as colunas da matriz \underline{K} .

O método de CHOLESKY pode ser separado em três etapas: etapa de decomposição, etapa de substituição e etapa de retrossubstituição. Todas essas etapas foram implementadas prevendo o caso de particionamento em bloco da matriz de rigidez. As técnicas citadas podem ser vistas nas referências [4, 21].

Deve ser mencionado que se a matriz de rigidez se encontrar em blocos, necessita-se apenas de espaço na memória principal para dois blocos de cada vez.

O armazenamento em bloco da matriz de rigidez é feito em um arquivo sequencial, que embora aumente o tempo das operações de transferência, permite o uso de fita magnética com dispositivo de memória auxiliar.

e) Organização e impressão dos deslocamentos finais :

Concluída a resolução do sistema de equações, resta, neste módulo, imprimir os resultados de deslocamentos para os pontos nodais e efetuar a aplicação dos coeficientes de Fourier sobre cada harmônico resultante em cada círculo nodal. Os resultados para os círculos nodais que serão impressos são os previamente escolhidos na entrada de dados.

f) Cálculo e impressão de tensões :

Calcula as tensões nos pontos de integração, obtendo-se as tensões nos pontos nodais através de uma técnica de extrapolação bilinear [4].

g) Cálculo do Fator de Intensidade de Tensões, Integral J e demais parâmetros importantes na avaliação do crescimento da fratura :

Este módulo é desenvolvido basicamente em uma rotina que calcula, a partir dos resultados de deslocamentos do sistema de equações, o Fator de Intensidade de Tensões, a Integral J e o Deslocamento de Abertura de Fratura. Os

cálculos dos parâmetros acima descritos são feitos na rotina FATOR através das equações (III.16), (III.17) e (III.13).

Neste módulo também são calculados e impressos, além do Fator de Intensidade de Tensões, da integral J e do Deslocamento de Abertura de Fratura, os valores do esforço normal e momento fletor para cada mola do Modelo de Linha de Molas.

IV.3 - Linguagem e Ambiente Computacional :

O sistema CRILO foi programado originalmente com a linguagem FORTRAN IV, utilizando-se como ambiente computacional o BURROUGHS B6700 na época implantado no Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ.

Na presente versão, modificações foram introduzidas e se fez uso de uma linguagem mais moderna e mais versátil que é o FORTRAN 77. Foram também feitas adaptações na versão original para que o sistema agora fosse desenvolvido no computador mais adequado ao processamento científico do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, que é o IBM 4381.

Embora o IBM 4381 possua uma memória principal muito grande, determinados problemas forçaram o uso de memória auxiliar que, neste equipamento, se constitui de disco temporário (quando não se necessita de muita memória auxiliar) e fitas magnéticas. Assim em alguns exemplos, o

esquema de blocagem foi imprescindível e o uso de disco temporário ou unidades de fitas foi necessário. Tal esquema de utilização de memória auxiliar foi facilitado já que as operações de entrada e saída para transferência de dados de CRILO encontram-se em uma rotina separada e assim foi bastante adaptar essa rotina.

IV.4 - Pós-processamento :

A modelagem da malha é de fundamental importância dentro de qualquer problema que se queira resolver utilizando-se o Método dos Elementos Finitos. Uma visualização da malha, quando possível, é um recurso que facilita em muito a detecção de erros quando da fase de discretização.

O sistema implementado possui uma interface que gera um arquivo com os dados geométricos da estrutura e com os deslocamentos finais, caso tenham sido requisitados, que pode ser utilizada para uma posterior visualização através do programa SISPLOT (Referência [22]). Esse programa permite uma visão das diversas projeções da estrutura original, bem como uma visualização em perspectivas da estrutura. Assim, terminada a entrada de dados o usuário poderá ter um "plot" da estrutura, conferindo se erros foram introduzidos na discretização.

Outro recurso disponível no SISPLOT é a visualização da estrutura deformada com as mesmas vistas da estrutura

original, possibilitando assim, através de uma inspeção visual constatar a coerência dos resultados obtidos. A geração de um arquivo para plotagem também é uma facilidade oferecida pelo SISPLOT e o computador IBM 4381.

A utilização do sistema computacional implementado em conjunto com o sistema SISPLOT facilita em muito o manuseio dos dados geométricos da estrutura em estudo e simplifica consideravelmente a análise da massa de resultados impressos já que a mesma pode apresentar-se combinada com uma configuração deformada da estrutura, fornecida pelo SISPLOT.

CAPÍTULO V

Aplicações do Sistema

V.1- Introdução

Depois de concluída toda a etapa de desenvolvimento teórico e, posteriormente, a implementação computacional, este capítulo se encarrega de mostrar a precisão e a eficiência conseguida com a utilização do sistema desenvolvido através de aplicações práticas. Um aspecto muito importante que deve ser salientado é que, como se procurou testar o modelo com exemplos de estruturas reais apresentando trincas e pela falta de estruturas deste tipo na bibliografia existente, a comparação dos resultados obtidos é feita considerando-se que a estrutura analisada pelo modelo tridimensional completo apresenta a resposta exata da análise. Assim, os exemplos mostrados a seguir apresentam análises executadas com o modelo tridimensional geral e com o modelo quasi-axissimétrico, que são comparados como forma de verificação dos resultados alcançados com o novo sistema.

É necessário também ressaltar que a calibração do modelo tridimensional geral do sistema foi previamente executada, empregando-se nestes testes modelos apresentados por SOUZA [18] e que, de acordo com a resposta obtida, atestaram o bom desempenho do modelo geral e comprovaram a confiabilidade do mesmo, sendo possível, como supra citado,

tomá-lo como resposta numérica de referência para as diversas aplicações.

V.2- Considerações sobre o Elemento de Transição

Antes que sejam apresentados os exemplos escolhidos para a aplicação da estratégia de análise proposta, é conveniente se fazer uma consideração a parte sobre o elemento de transição.

Diferentemente do que ocorre com malhas discretizadas com elementos de casca tridimensionais gerais ou com elementos de casca axissimétricas que geram resultados satisfatórios mesmo com uma modelagem grosseira da estrutura a ser analisada, os elementos de transição necessitam de cuidados especiais quando da utilização dos mesmos. Estes elementos, como já exaustivamente discutidos nos capítulos anteriores, são responsáveis pelo acoplamento entre as regiões geral e axissimétrica de uma determinada casca. Sendo assim, se faz necessário que se entenda que o perfeito funcionamento desta interface está ligado ao grau de refinamento da malha de elementos finitos nesta região, evitando com isso resultados errados da análise provenientes da porção relativa à transição. O que se deseja frisar neste comentário é que uma transição confiável irá depender de uma adequada modelagem desta região, observando-se que erros podem surgir decorrentes de uma discretização insuficiente na transição ou da utilização de um número inadequado de harmônicos na representação em série.

Para ilustrar e comprovar o afirmado anteriormente, foram executados testes com uma estrutura muito simples mas adequada aos propósitos requeridos. A estrutura, um cilindro de raio 10, espessura unitária e comprimento 10 (Figura V.1), foi inicialmente modelado somente com dois elementos axissimétricos. O cilindro foi solicitado por uma carregamento axial de tração constante e, apesar de ser utilizada uma malha axissimétrica muito pobre, funcionou perfeitamente bem, independente do número de harmônicos da Série de Fourier empregado. Em seguida, a mesma estrutura foi discretizada com uma malha grosseira de elementos gerais (8 elementos) e, mesmo assim, também funcionou satisfatoriamente.

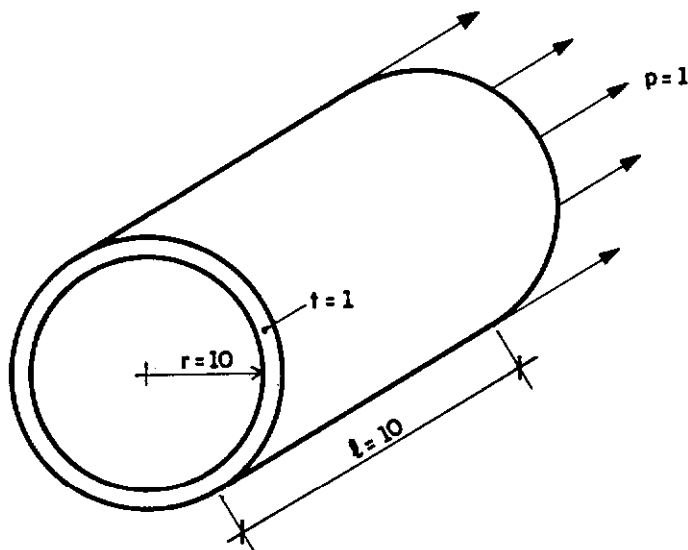


Figura V.1

O teste com o cilindro foi feito agora com a estrutura

modelada com um elemento axissimétrico e quatro elementos de transição. Para este caso o resultado só foi satisfatório com um número de harmônicos inferior a 5, uma vez que o harmônico 4 da série apresentou problemas e, conseqüentemente, resultados incorretos. A transição foi feita então com 8 elementos e mostrou um resultado adequado até o 8^o harmônico da Série de Fourier que, embora não comprometendo inteiramente a solução, apresentou resultados incorretos. O último teste realizado empregou o mesmo elemento axissimétrico, porém 16 elementos de transição. Neste caso, o resultado com até 16 harmônicos foi perfeito, não apresentando problemas com nenhum harmônico. É preciso deixar bem claro que, obviamente em se tratando de um exemplo axissimétrico e com carregamento axissimétrico, o campo de deslocamento será também axissimétrico, sendo, portanto, suficiente a análise utilizando-se somente o harmônico zero da Série de Fourier, uma vez que o mesmo é constante ao longo de todo círculo nodal. Entretanto, o objetivo dos testes efetuados foi estudar as limitações do elemento de transição e, para isso, o exemplo desempenhou o seu papel.

Através dos testes pode-se concluir que o elemento de transição funciona com grande precisão desde que tenha sido adequadamente utilizado com relação ao refinamento da malha de interface. Não é suficiente aumentar muito número de harmônicos utilizados na análise para se obter um melhor resultado sem que paralelamente haja uma melhoria na malha de transição. Uma malha pouco refinada não consegue acomodar

um número excessivo de harmônicos e, conseqüentemente, produz resultados com precisão muito baixa e, alguma vezes, até errados. Assim, nesta interface é imprescindível um estudo mais cuidadoso para que não haja problemas em decorrência de uma não compatibilidade entre o número de harmônicos empregados e o grau de refinamento da malha utilizado.

V.3- Cilindro Submetido à Pressão Interna e à Tração

O objetivo deste e dos demais exemplos a serem expostos é estudar estruturas quasi-axissimétricas com trincas. Neste exemplo analisa-se um cilindro submetido a uma pequena pressão interna e a um carregamento de tração axial com uma fratura de pequenas dimensões localizada na direção circunferencial do cilindro. A geometria, as características físicas do material e os carregamentos aplicados estão mostrados abaixo (Figura V.2).

Raio do Ponto Médio	= 525 mm
Comprimento	= 1000 mm
Espessura	= 50 mm
Módulo de Elasticidade	= 207.000 N/mm ²
Coeficiente de Poisson	= 0,3
Carregamento de Tração	= 400 N/mm ²
Pressão Interna	= 1 N/mm ²

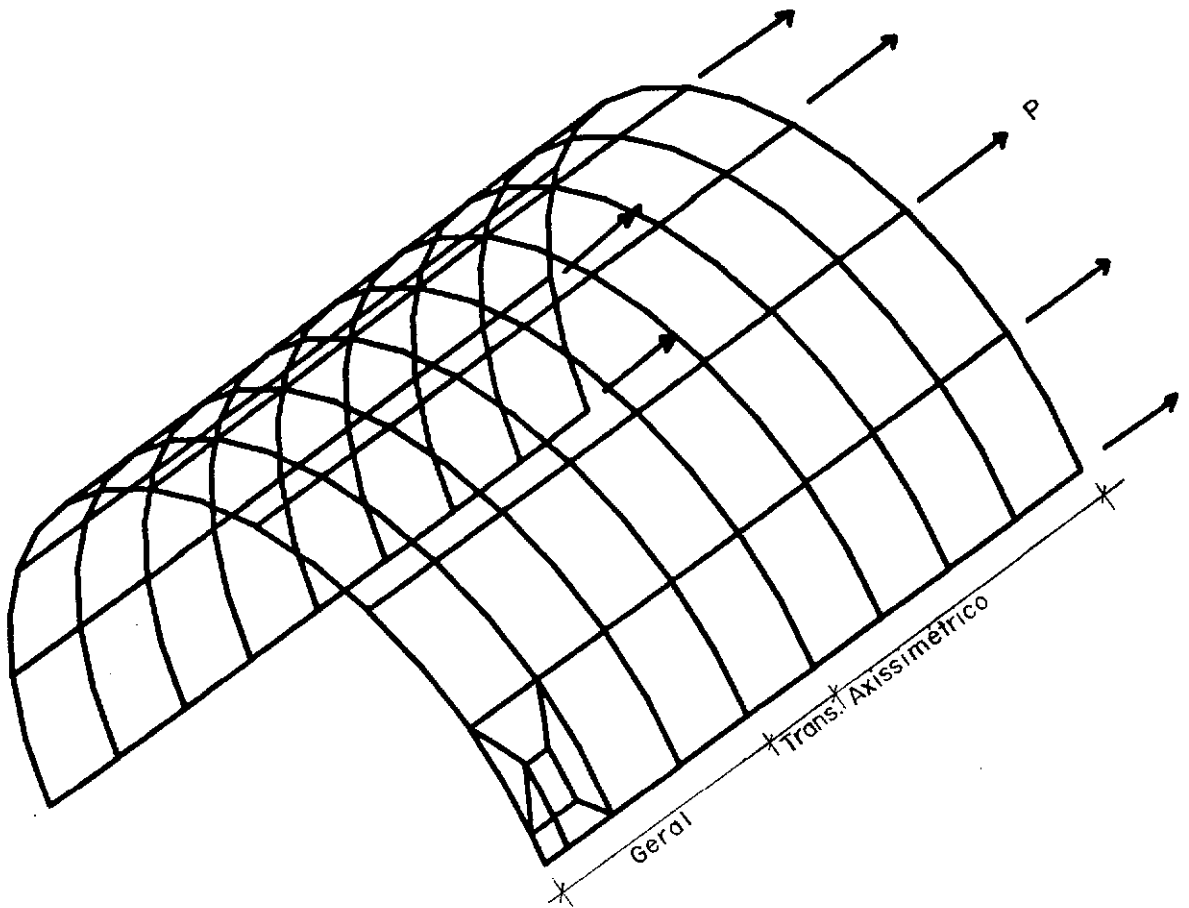


Figura V.2 - Casca Cilíndrica com Trinca

Inicialmente o cilindro foi analisado utilizando-se uma malha discretizada somente com elementos de casca geral. Nesta discretização foram utilizados 70 elementos e 247 pontos nodais. Tirou-se partido da geometria e do carregamento simétricos e somente um quarto da estrutura foi discretizado, aplicando as condições de contorno adequadas nos pontos nodais. Para evitar problemas de movimento de corpo rígido, nas extremidades do cilindro (onde se encontram os carregamentos de tração) foi simulado um anel rígido que só permite o deslocamento destas bordas na

direção axial. Esta análise foi então comparada com outra utilizando a malha quasi-axissimétrica correspondente. Nesta malha o número de pontos nodais se reduziu a 135 e foram empregados 42 elementos, sendo 30 tridimensionais gerais, 8 de transição e 4 axissimétricos. As condições de simetria foram mantidas para os pontos nodais. A fratura considerada no exemplo encontra-se na linha de simetria da direção circunferencial do cilindro e está localizada na parte externa. Em sua modelagem foram utilizados 3 elementos escalares (molas). O comprimento e a profundidade da fratura em cada ponto nodal podem ser vistos na Figura V.3.

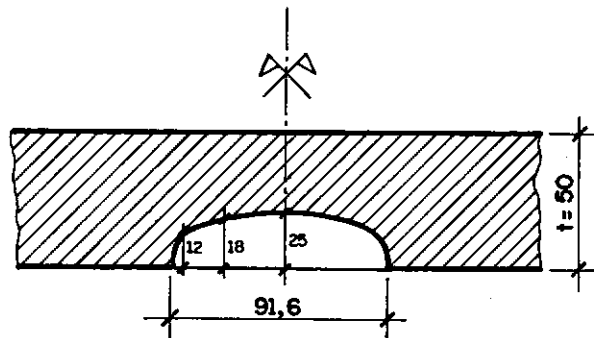


Figura V.3

Os resultados de Fator de Intensidade de Tensões e Integral J obtidos com os dois modelos são comparados nas Tabelas (V.1) e (V.2), utilizando-se no modelo quasi-axissimétrico 3 (três) harmônicos da Série de Fourier. Nos Gráficos (V.1), (V.2) e (V.3) são mostrados comparações de deslocamento e de tensões entre o modelo geral e o axissimétrico analisado com diversos harmônicos. Uma comparação do número de coeficientes operados em cada modelo, bem com os tempos de CPU gastos, são mostrados na Tabela (V.3) para 3 harmônicos da série.

Mola	prof. a(x) (mm)	Fat. Int.de Tens. K_I (N.mm ^{-1/2})		dif. (%)
		Mod. Geral	Mod. Quasi-Ax.	
1	25,0	3043,44	3062,24	0,62
2	18,0	3379,38	3395,34	0,47
3	12,0	1985,05	1995,08	0,51

Tabela V.1 - Fator de Intensidade de Tensões

Mola	Integral J (N.mm/mm)		dif. (%)
	Mod. Geral	Mod. Quasi-Ax.	
1	40,72	41,22	1,23
2	50,20	50,63	0,96
3	17,32	17,50	1,04

Tabela V.2 - Integral J

	Modelo Geral	Modelo Quasi-Axis.
Coef. Operados	169.105	89.120
Tempo CPU (s)	92,1	50,1

Tabela V.3

Deslocamento Axial

(meridiano zero graus)

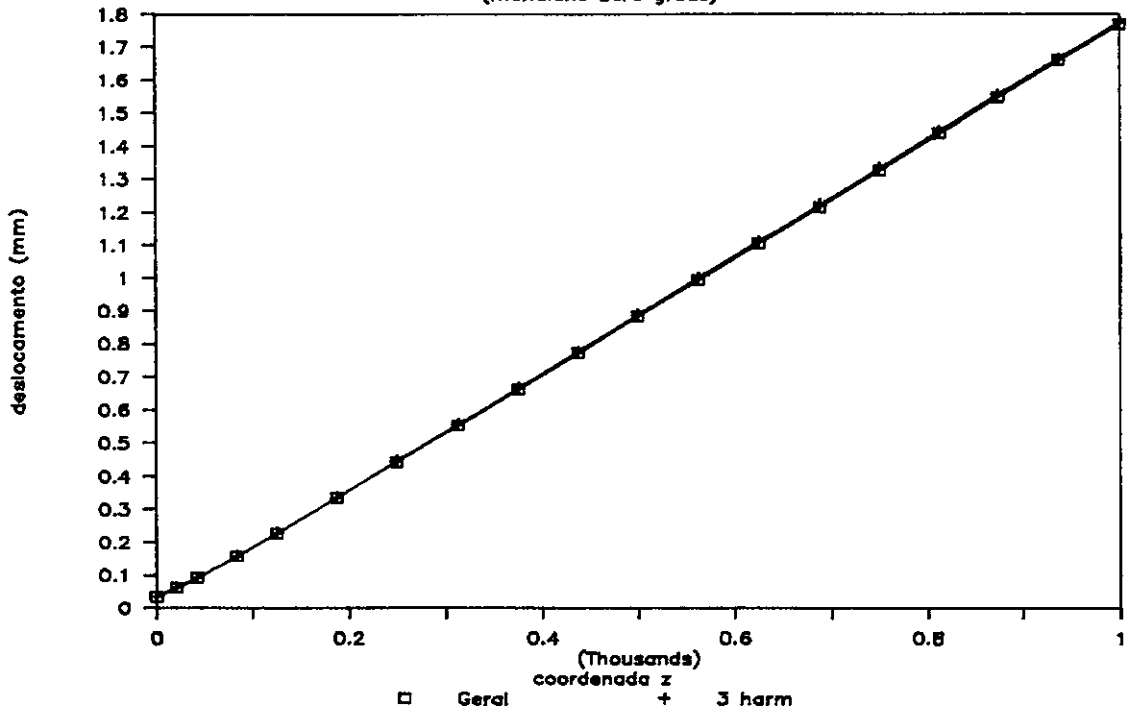


Gráfico V.1 - Deslocamento Axial ao longo do Meridiano 0°

Desl. na Direção X da Casca

(Linha da Fratura)

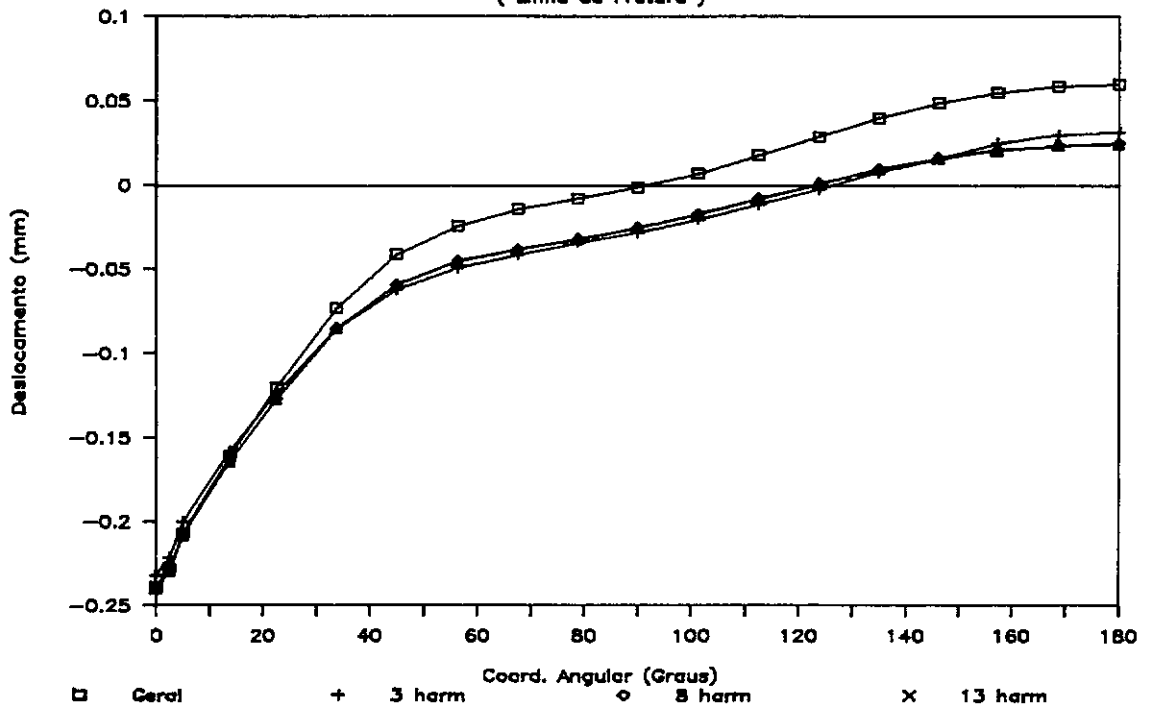


Gráfico V.2 - Deslocamento em x na Linha de Simetria

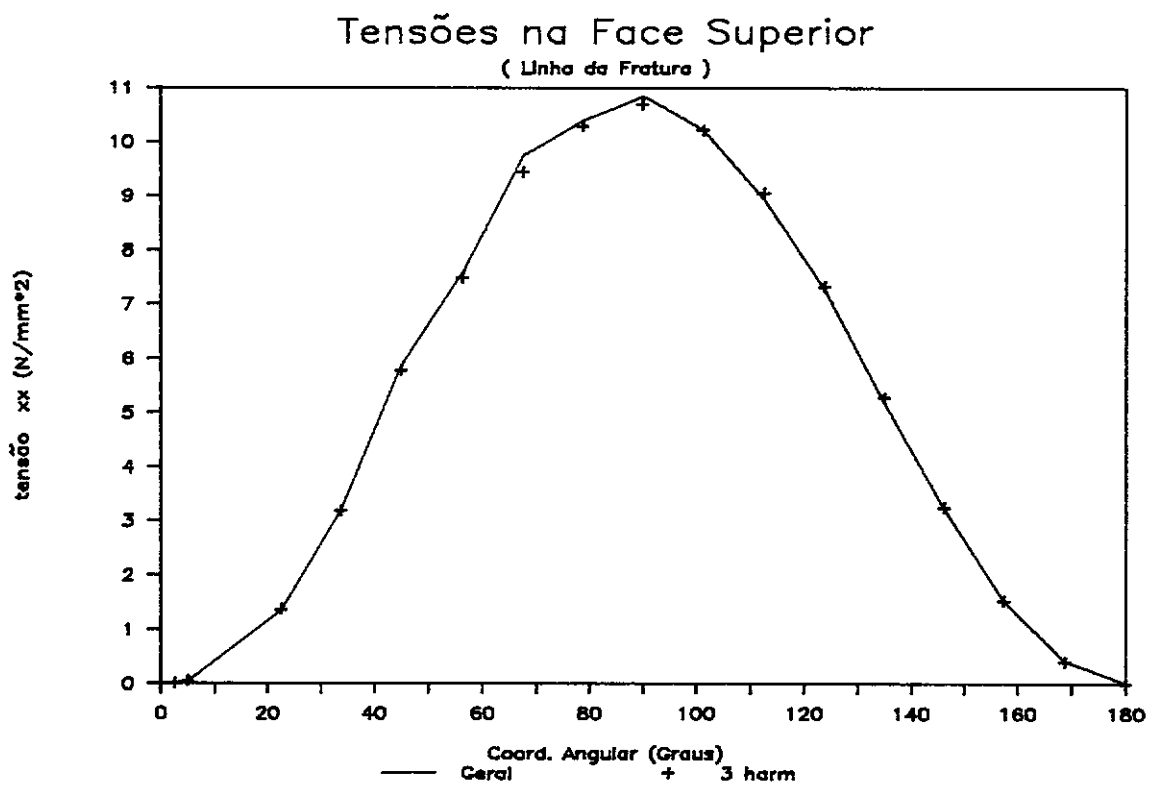


Gráfico V.3 - Tensões σ_{xx} na Face Superior na
Linha de Simetria

V.4- Vaso de Pressão - Cilindro com Extremidades Fechadas por Cúpulas Hemisféricas

Este problema consiste num vaso de pressão quasi-axissimétrico com três regiões com irregularidades. O vaso é constituído de um cilindro com as duas extremidades fechadas por cúpulas. As irregularidades localizadas estão nas cúpulas e no meio do cilindro e são, respectivamente, duas aberturas dispostas simetricamente em cada uma das cúpulas de fechamento do vaso e duas fraturas, também simétricas, localizadas na metade da parte cilíndrica do vaso (Figura V.4).

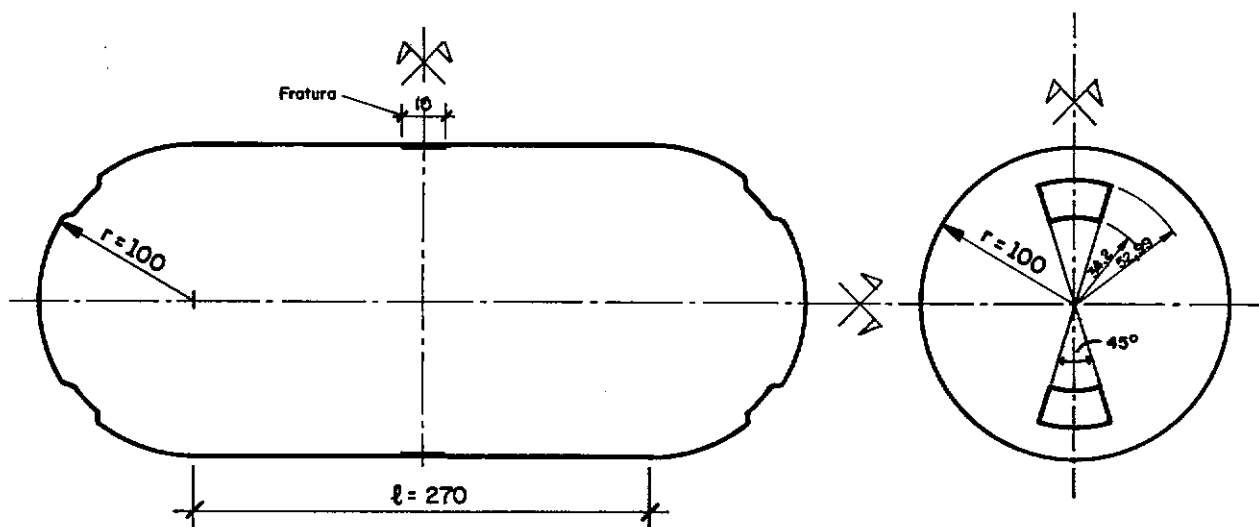


Figura V.4 - Cilindro com Cúpulas Hemisféricas

Os dados físicos e geométricos são :

Comprimento do cilindro = 270 in

Raio do cilindro	= 100 in
Raio das cúpulas	= 100 in
Espessura do vaso	= 10 in
Módulo de Elasticidade	= 10500 Ksi
Coefficiente de Poisson	= 0,3125
Pressão interna atuante	= 1 Ksi

A malha de elementos gerais utilizada para o modelo tridimensional é composta por 152 elementos e 524 pontos nodais, resultando 2620 grau de liberdade. No modelo quasi-axissimétrico foi empregada uma malha composta por 15 elementos axissimétricos, 25 elementos de transição e 72 elementos gerais com um total de 339 pontos nodais. Em ambos os modelos, apenas um oitavo da estrutura foi discretizado levando-se em conta que ela apresenta dupla simetria, na geometria e no de carregamento aplicado. Para o modelo quasi-axissimétrico foram empregados 2, 5 e 8 harmônicos da Série de Fourier, perfazendo, respectivamente 1855, 2335 e 2815 graus de liberdade em cada análise. Um "plot" da estrutura indicando as regiões em que foram utilizados elementos axissimétricos, de transição e gerais é mostrado nas Figuras V.5 e V.6. Estas Figuras também mostram configurações deformadas da estrutura analisada.

As fraturas, neste caso, estão localizadas no meio da porção cilíndrica do vaso. Elas tem comprimento de 10 in e profundidade variando elípticamente de 0,265 in a 4,0 in. A discretização foi feita em uma só fratura e na metade de seu comprimento total já que a dupla simetria permitiu esta

facilidade. Foram utilizados 5 elementos escalares na modelagem da trinca.

Os resultados mostrados nos Gráficos (V.4), (V.5) e (V.6) mostram a boa concordância de deslocamentos e tensões obtida nos dois modelos para um número variado de harmônicos no modelo quasi- axissimétrico. As Tabelas (V.4) e (V.5) fornecem os parâmetros Fator de Intensidade de Tensões e Integral J para os dois modelos, sendo que os resultados do modelo quasi- axissimétrico foram obtidos com apenas 2 (dois) harmônicos da Série de Fourier. O tempo de processamento e o número de coeficientes armazenados, empregando-se também dois harmônicos no modelo quasi- axissimétrico, também demonstram as vantagens do modelo desenvolvido (Tabela V.6).

Uma observação importante deve salientada neste ponto. Os casos estudados não se preocupam em exaltar a economia computacional obtida com o modelo desenvolvido, aspecto relevante do referido sistema e que deve ser levado em consideração.

Mola	prof. a(x) (in)	Fat. Int. Tens. K_I ($Kp.in^{-1/2}$)		dif. (%)
		Mod. Geral	Mod. Quasi-Ax.	
1	0,265	625,17	623,61	0,25
2	2,650	244,59	244,09	0,20
3	3,460	275,63	275,14	0,18
4	3,870	290,03	289,56	0,16
5	4,000	286,84	286,38	0,16

Tabela V.4 - Fator de Intensidade de Tensões

Mola	Integral J ($Kp.in/in$)		dif. (%)
	Mod. Geral	Mod. Quasi-Ax.	
1	33,59	33,42	0,51
2	5,14	5,12	0,39
3	6,53	6,50	0,38
4	7,23	7,20	0,35
5	7,07	7,05	0,28

Tabela V.5 - Integral J

	Modelo Geral	Modelo Quasi-Axis.
Coef. Operados	265.780	179.585
Tempo CPU (s)	129,6	93,9

Tabela V.6

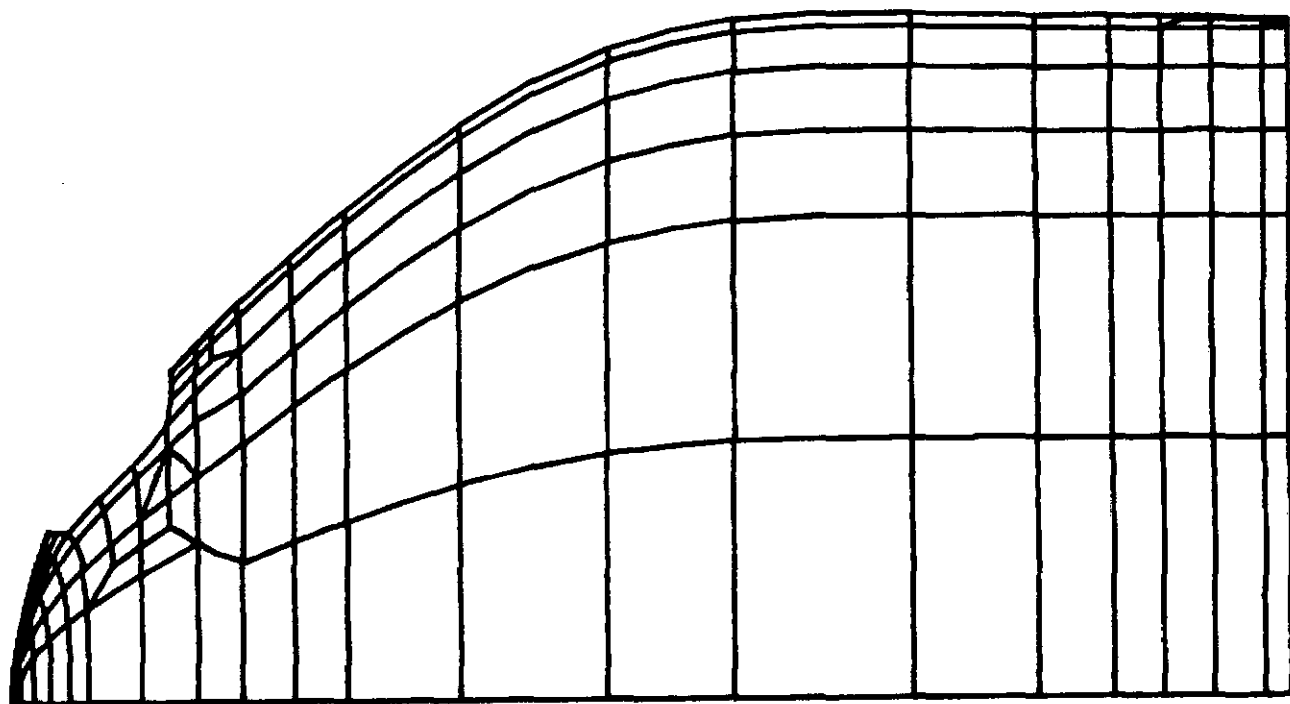
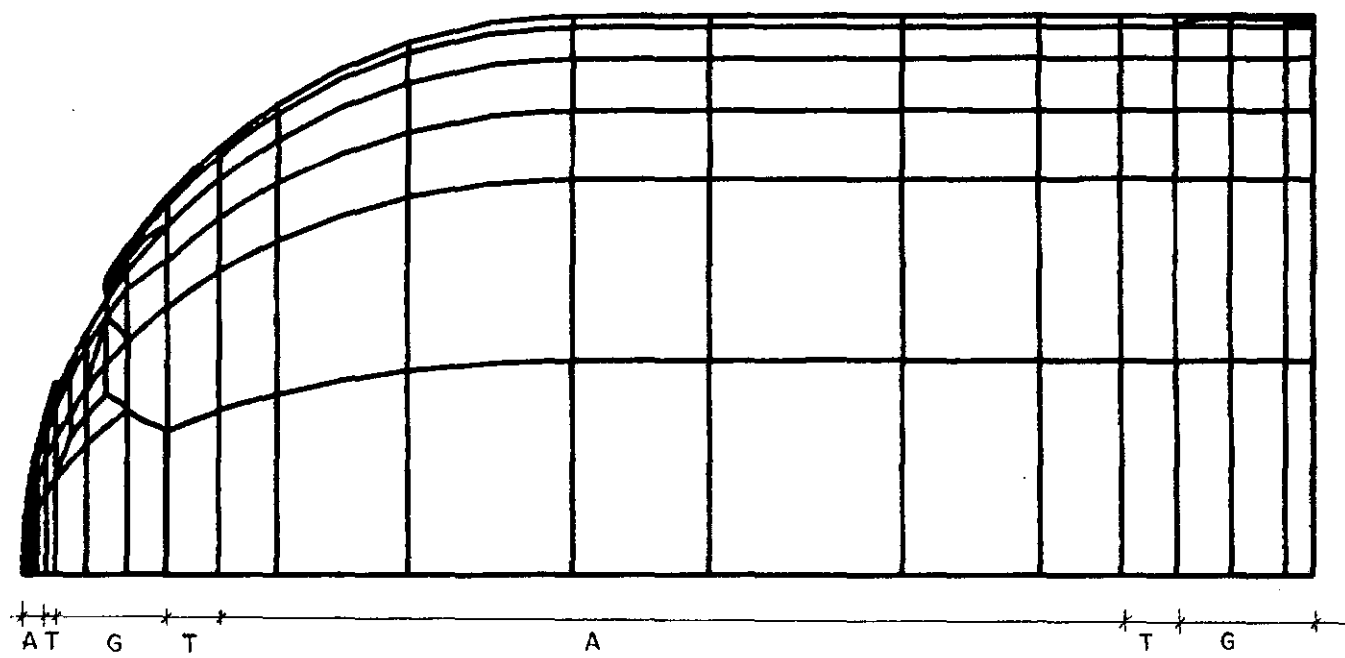


Figura V.5

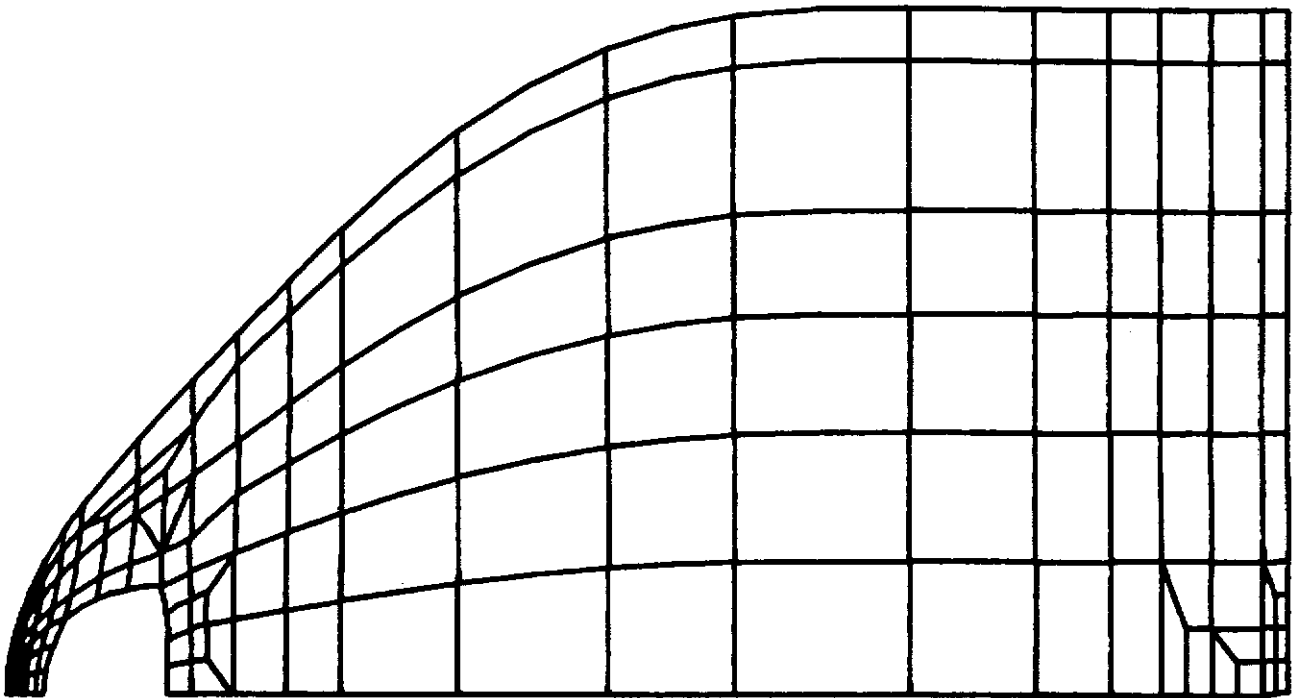
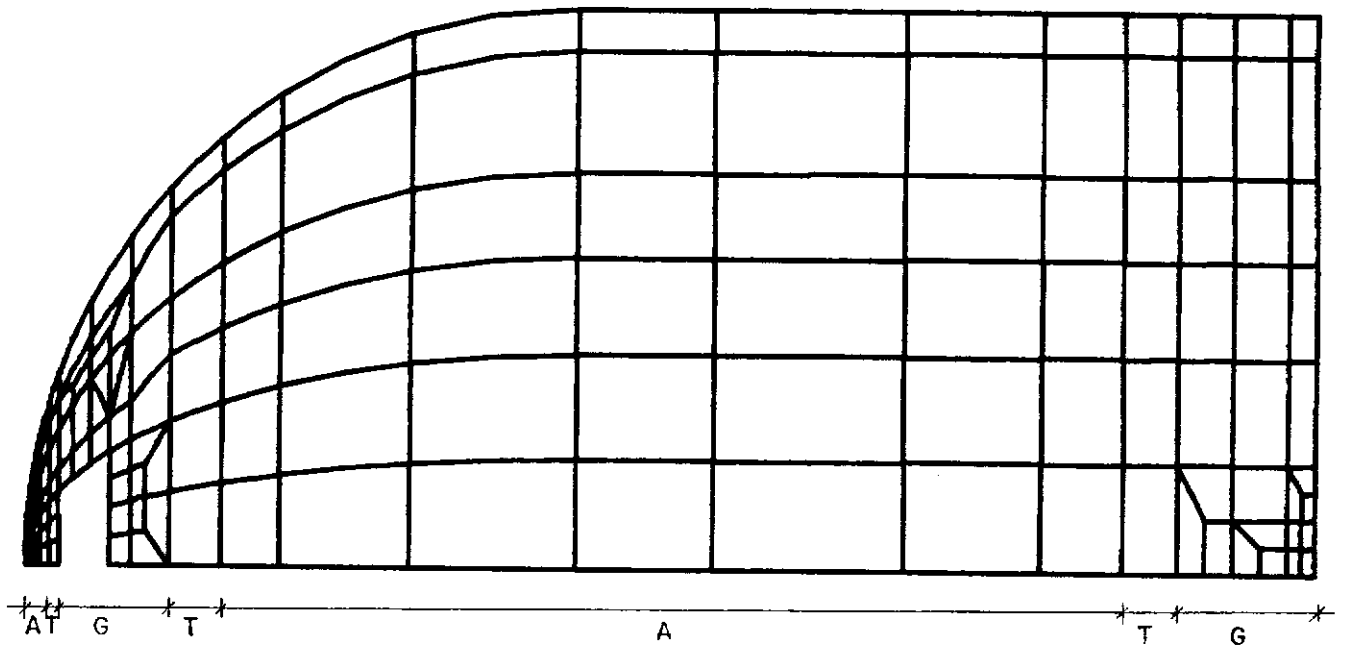


Figura V.6

Deslocamento na Direção Normal

(Ao longo do meridiano em zero graus)

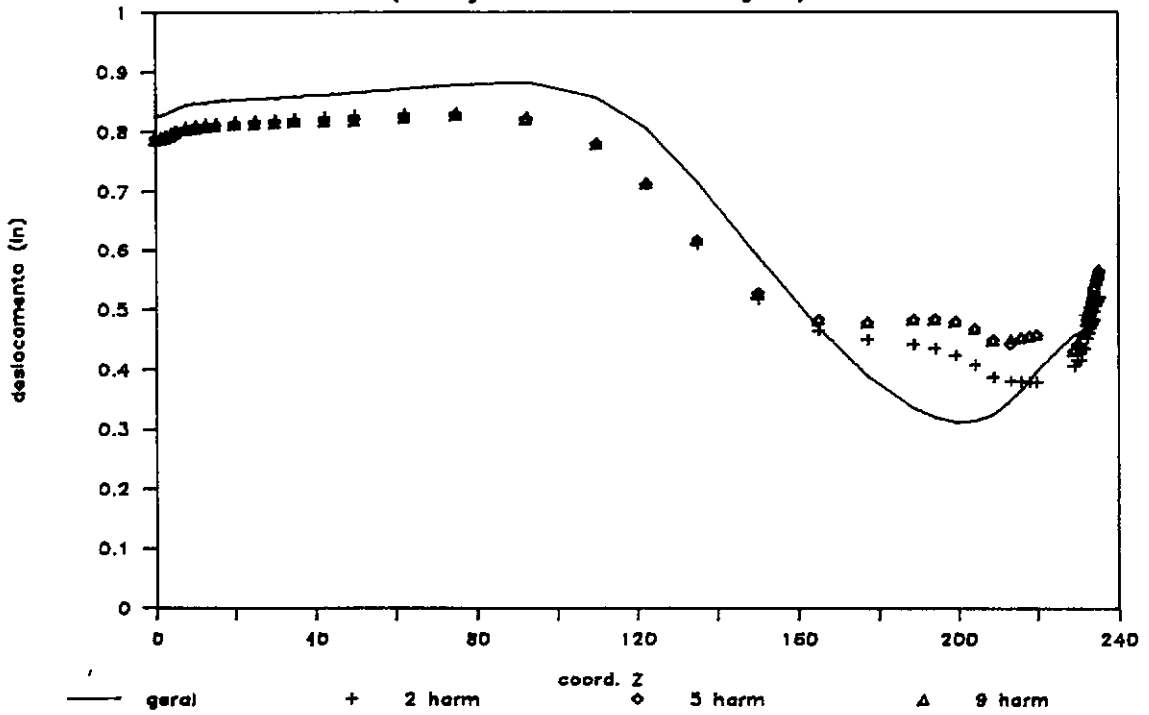


Gráfico V.4 - Deslocamento Normal ao Longo do Meridiano 0°

Deslocamento na direção X da Casca

(Ao longo da circunferência em Z=0)

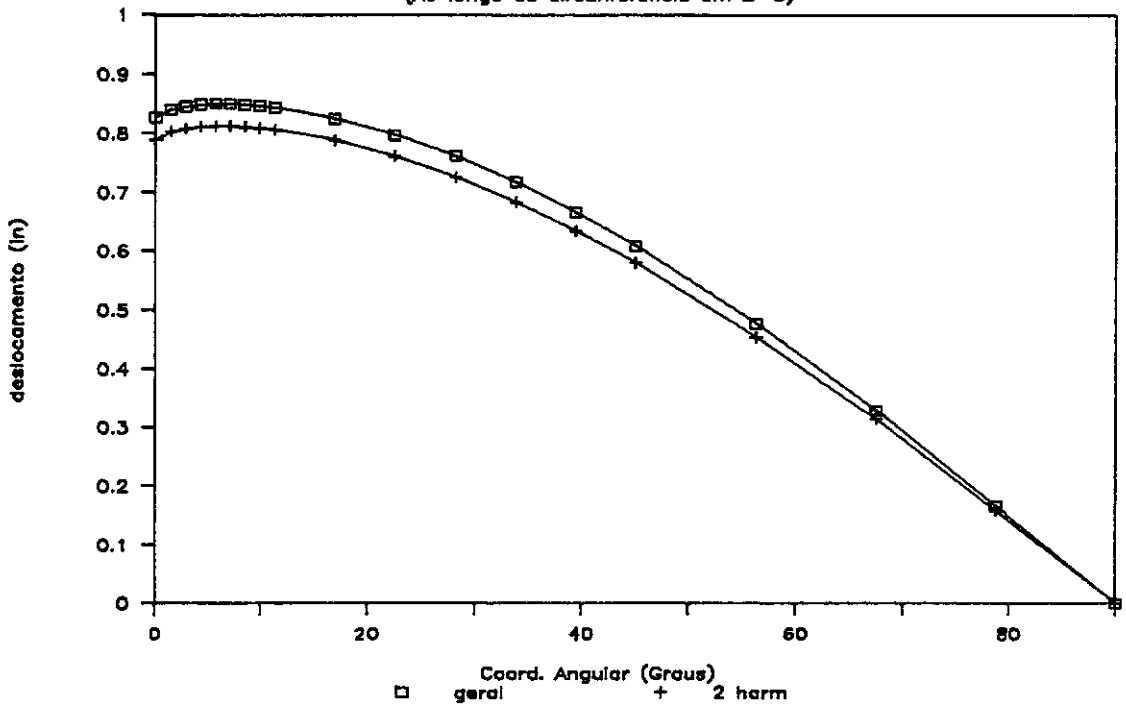


Gráfico V.5 - Deslocamento na direção x em z=0

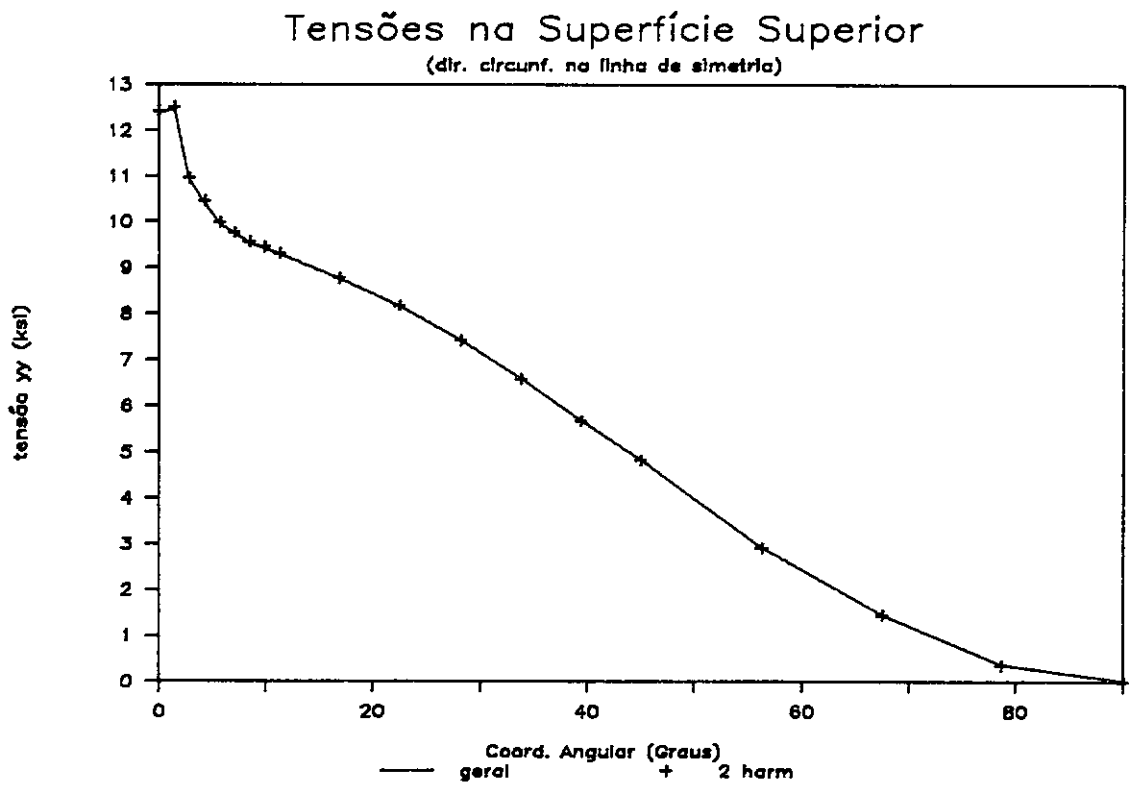


Gráfico V.6 - Tensões σ_{yy} na Face Superior na Linha de Simetria (Direção Circunferencial)

V.5- Esfera para Armazenamento de G.L.P.

O Quarto e último exemplo a ser apresentado trata-se de um reservatório esférico para armazenamento de G.L.P. (Gás Liquefeito de Petróleo). Este tipo de estrutura é de utilização frequente na indústria petroquímica. A idéia, com a análise desta estrutura, é testar o sistema com um caso real, verificando a possibilidade de emprego do mesmo em estruturas de grande porte e com muitos graus de liberdade e, conseqüentemente, conferindo o bom desempenho do sistema também com uso de dispositivos de memória auxiliar.

O exemplo analisado é uma esfera da Petrobrás da Refinaria Henrique Lage - REVAP, São José dos Campos, SP (EF - 47004), que apresentou trincas. Infelizmente não foi possível obter-se dados que pudessem reproduzir a falha ocorrida na estrutura real, sendo necessário então simular uma fratura com dimensões compatíveis com o problema e que assim foi analisado. A escolha de uma fratura conveniente para a análise facilitou o trabalho de discretização da estrutura e, embora não sendo o que aconteceu na prática, serviu muito bem aos propósitos aqui desejados. Os demais dados referentes à geometria (Figura V.6) e as constantes físicas do material, além do carregamento aplicado, encontram-se listados a seguir:

Raio da esfera	= 9.160 mm (Ponto Médio)
Módulo de elasticidade	= 21.000 N/mm ²
Coeficiente de Poisson	= 0,3

Pressão interna aplicada $= 0,167 \text{ N/mm}^2$

A Primeira análise foi efetuada com a malha de elementos gerais. A esfera foi modelada completa com 2233 pontos nodais, resultando em um total de 742 elementos de casca geral. Na análise com o modelo quasi-axissimétrico foram utilizados 715 nós e 276 elementos, sendo que 154 elementos de casca geral nas regiões das irregularidades (fratura e apoios), 108 elementos de transição e 14 elementos axissimétricos. As condições de contorno utilizadas foram os apoios ao longo da região do meio da esfera, como visto na Figura V.6, reproduzidas nos dois modelos analisados. A fratura foi simulada através de cinco elementos escalares (molas) com profundidade máxima de 50% da espessura da casca e com variação elíptica para ambos os lados. As Figuras V.7 e V.8 mostram a malha geral utilizada e o posicionamento das regiões geral, de transição e axissimétrica no modelo quasi-axissimétrico. Uma configuração deformada da esfera é mostrada na Figura V.9.

Na análise com o modelo geral, o número total de incógnitas do sistema foi de 11.165 e foram operados pelo "solver" 4.687.695 coeficientes. No modelo quasi-axissimétrico para um total de 3 harmônicos da Série de Fourier, resultou em 3.885 incógnitas e 1.221.715 coeficientes operados.

Os resultados finais das análises (Tabelas V.7 a V.9 e Gráfico V.7) mostram o desempenho do modelo desenvolvido.

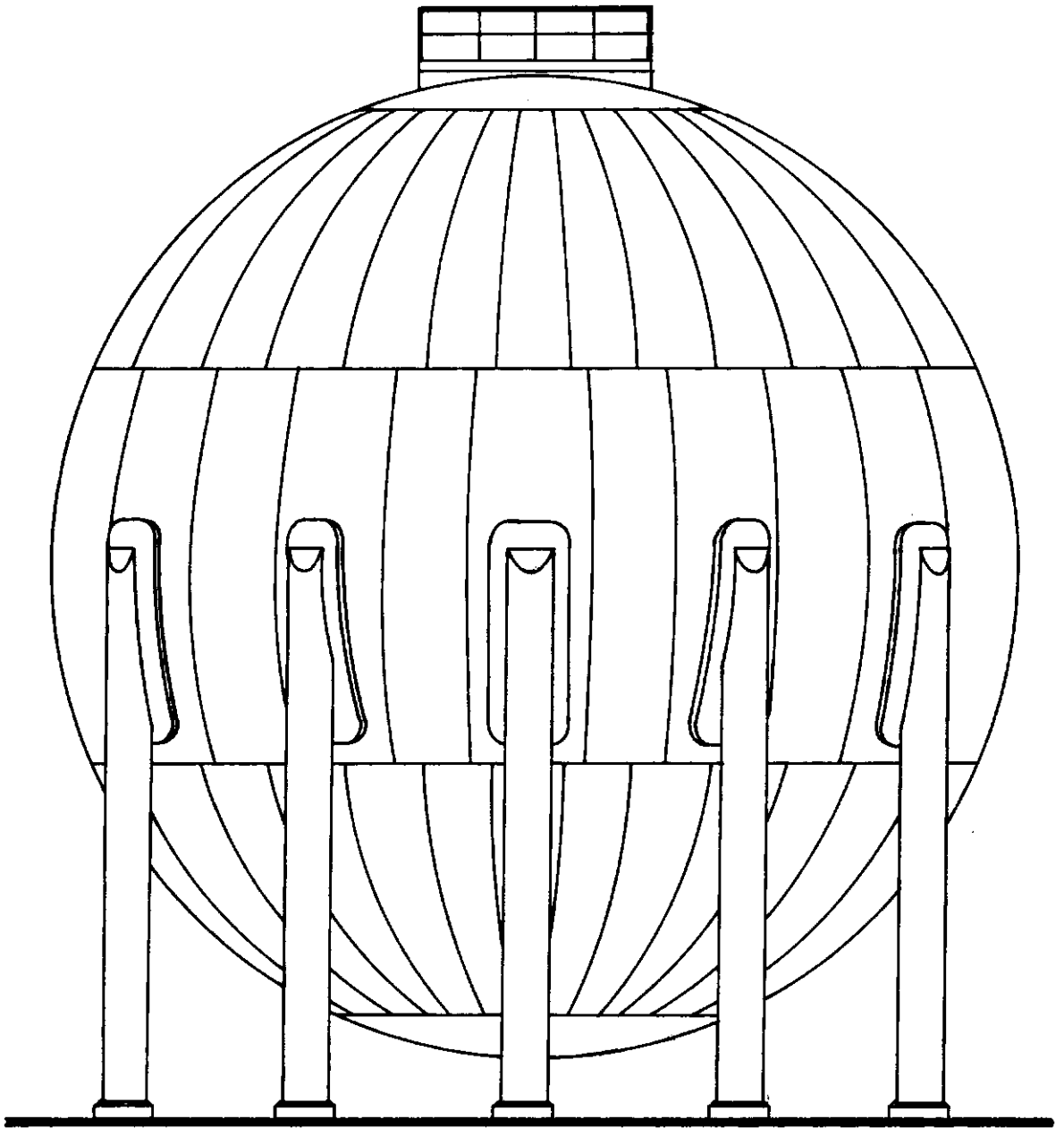


Figura V.6 - Esfera de Armazenamento de G.L.P.

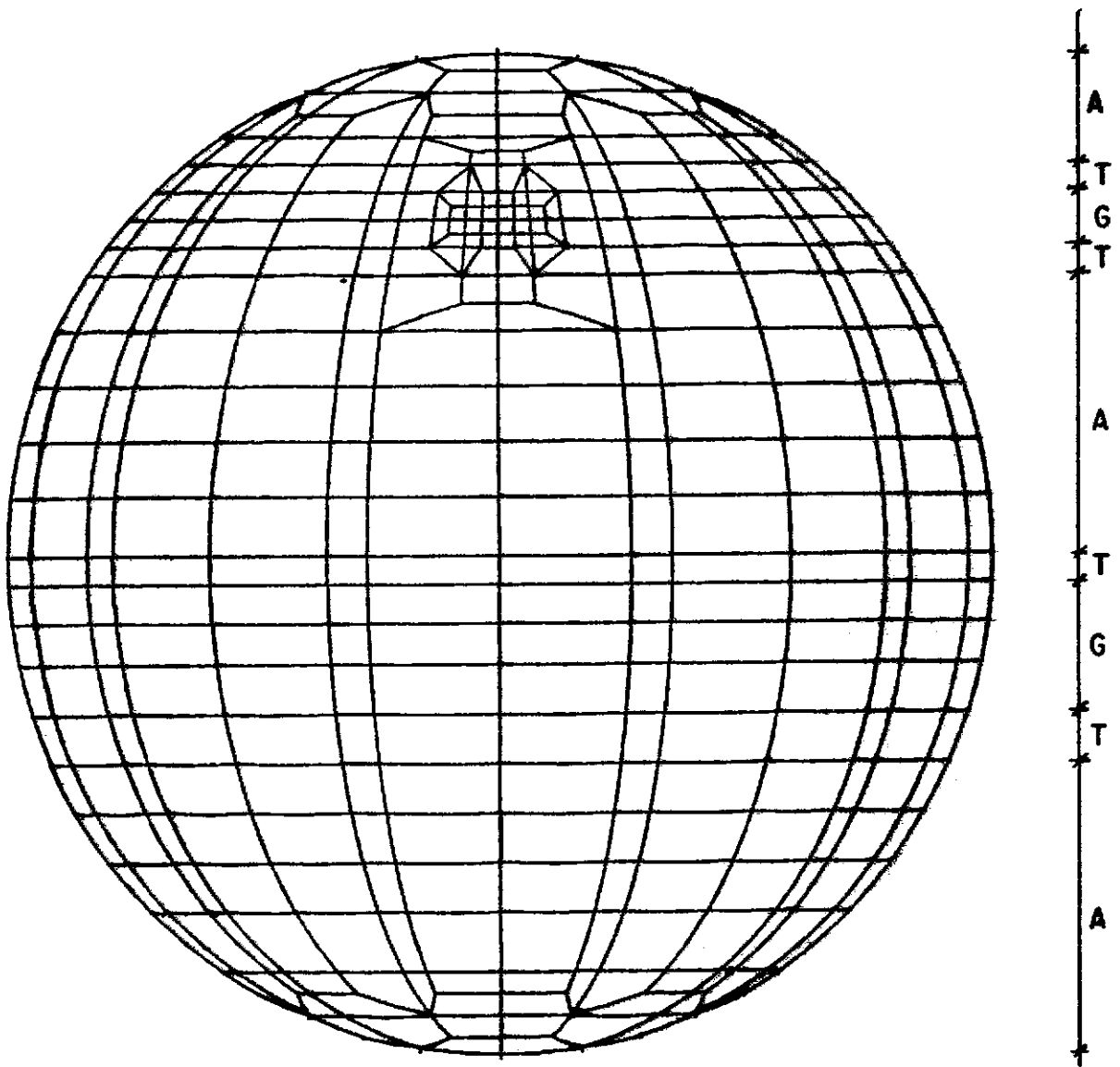


Figura V.7 - Projeção YZ

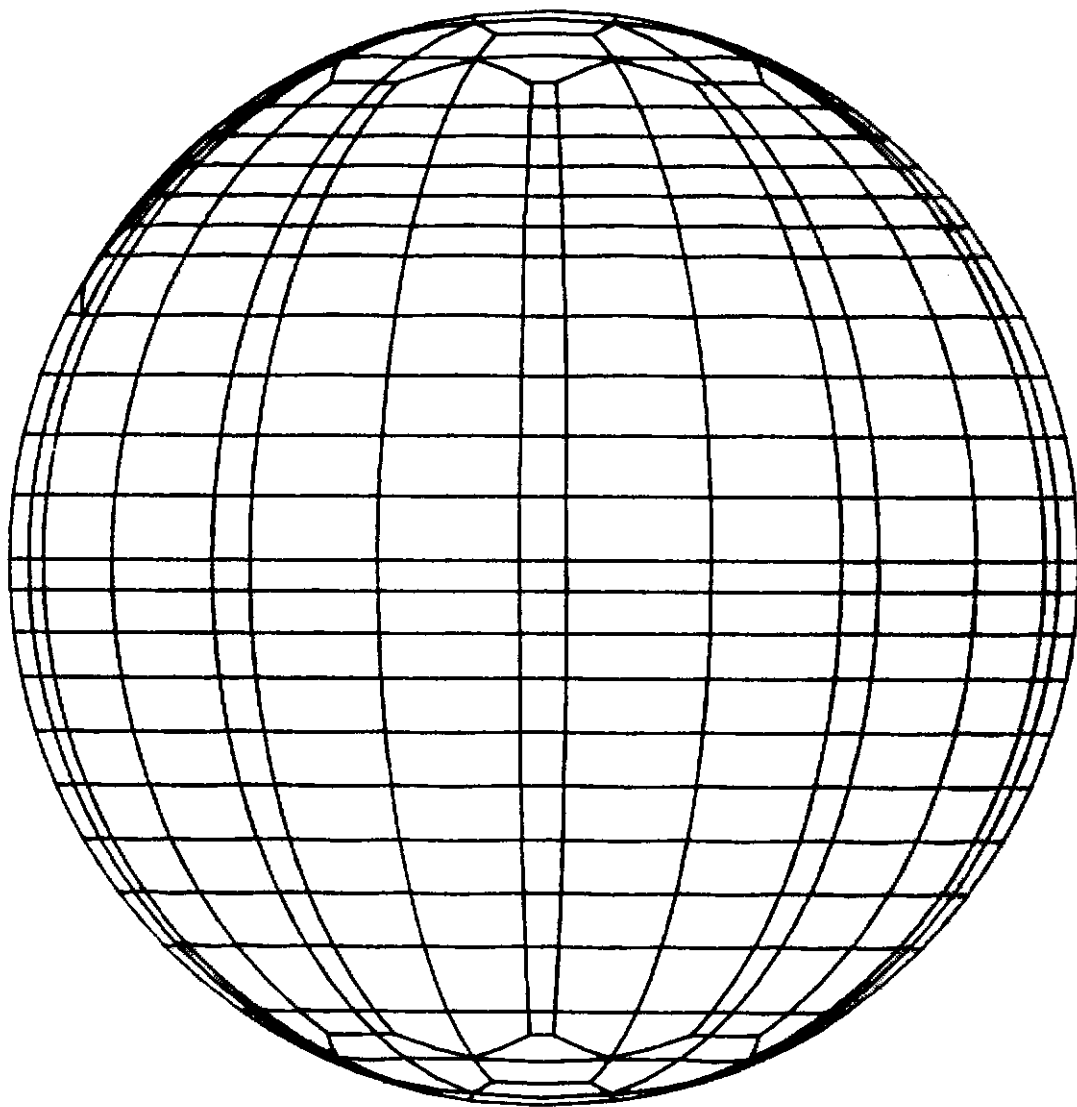


Figura V.8 - Projeção XZ

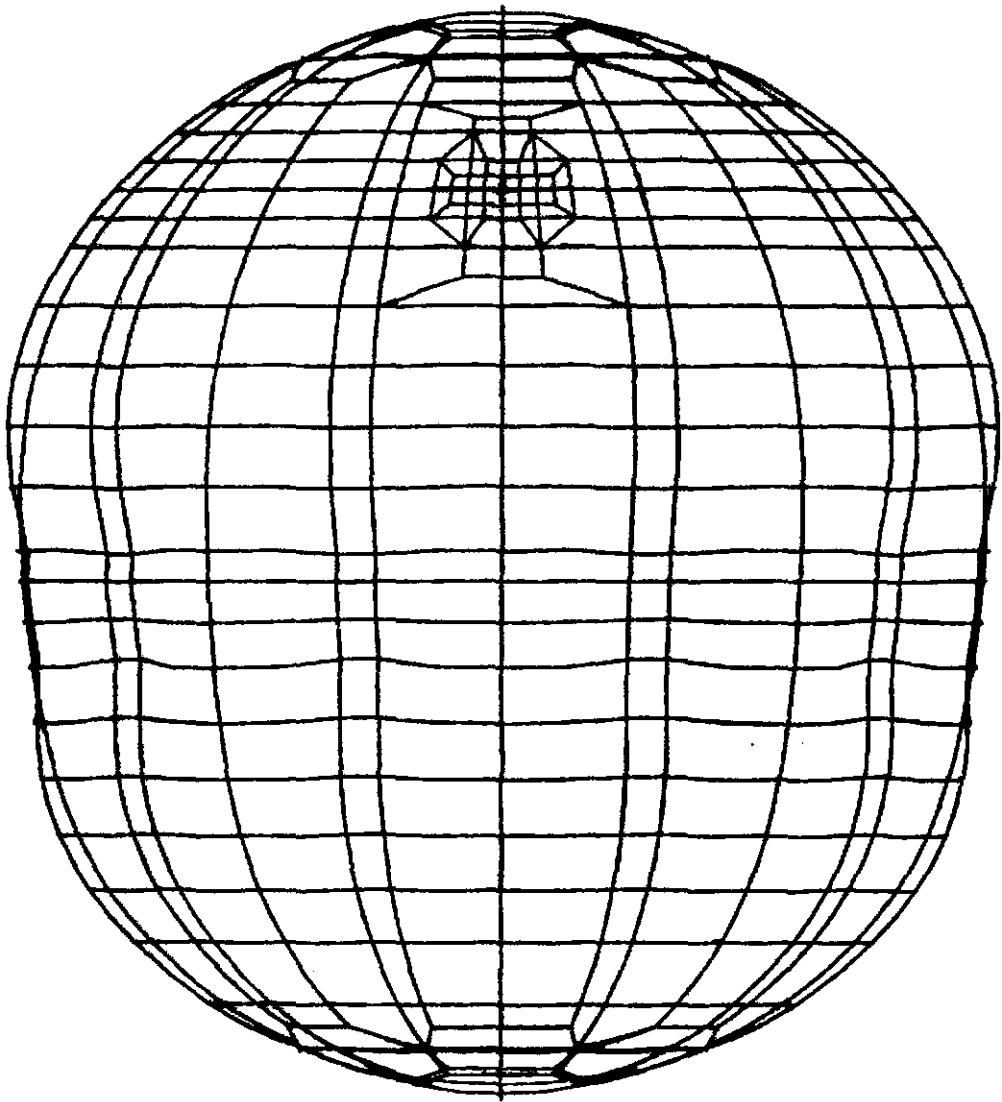


Figura V.9 - Configuração Deformada

Mola	prof. a(x) (mm)	Fat. Int. Tens. K_I (N.mm ^{-1/2})		dif. (%)
		Mod. Geral	Mod. Quasi-Ax.	
1	23,38	51,034	52,223	2,33
2	233,80	33,357	31,139	6,65

Tabela V.7 - Fator de Intensidade de Tensões

Mola	Integral J (N.mm/mm)		dif. (%)
	Mod. Geral	Mod. Quasi-Ax.	
1	0,1129	0,1182	4,69
2	0,0482	0,0420	12,86

Tabela V.8 - Integral J

	Modelo Geral	Modelo Quasi-Axis.
Tempo CPU (s)	1967,9	1526,8

Tabela V.9

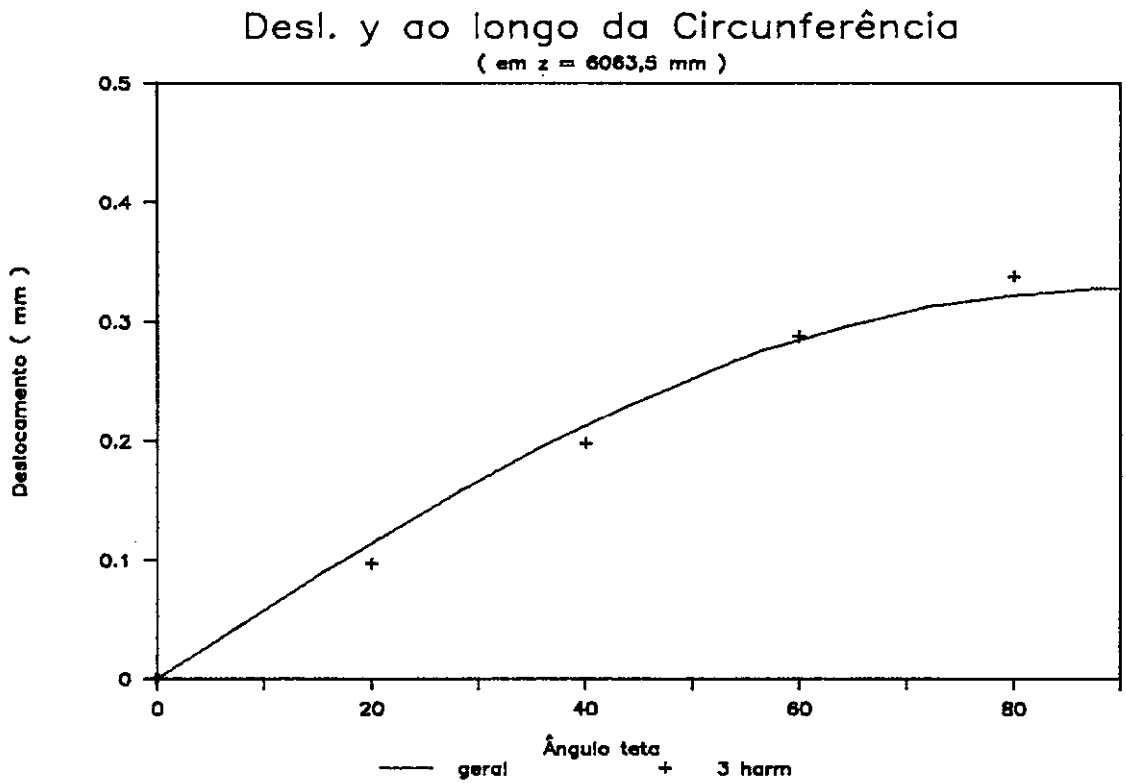


Gráfico V.7

CAPÍTULO VI

Conclusão

A análise do crescimento de trincas em estruturas com geometria predominantemente axissimétrica foi tratada neste trabalho, objetivando com isso desenvolver um sistema computacional que se mostrasse capaz de executar este estudo de modo eficiente e preciso. O sistema implementado utiliza elementos finitos de casca para modelar a estrutura, enquanto que a simulação da trinca não passante é efetuada através de um modelo de linha de molas discretas. Com relação ao conjunto de elementos de casca empregados, a parte axissimétrica da estrutura é discretizada por elementos axissimétricos e a parte geral por elementos tridimensionais gerais, ficando a junção das duas partes a cargo de elementos de transição.

O sistema se presta à análise de estruturas axissimétricas com irregularidades quaisquer, dentre elas trincas. A estrutura pode estar submetida a qualquer tipo de carregamento, seja ele axissimétrico ou não. A generalização do posicionamento e forma das irregularidades existentes dá uma maior versatilidade e aproveitamento ao sistema. No caso do aparecimento de trincas, estas podem ter geometria qualquer, com profundidade variável e localizando-se na parte interna ou externa da estrutura a ser analisada.

Apesar de se apresentar utilizável em uma extensa gama

de problemas, existem algumas observações a serem feitas com relação ao sistema desenvolvido. Um ponto importante é a passagem da malha axissimétrica para a malha geral com o uso do elemento de transição. A discretização desta requer uma atenção mais cuidadosa pois o número de harmônicos da Série de Fourier a ser empregado neste acoplamento deve ser compatível com o número de elementos de transição utilizados. No exemplo 1 (capítulo anterior), se fez um estudo deste problema. Outro aspecto a ser considerado é com relação a limitações no uso do modelo de linha de molas, uma vez que a solução no estado plano de deformação utilizada é válida somente para a relação profundidade da fratura / espessura da casca (a/t) menor que 0,8. Ainda com relação ao modelo de linha de molas, se houver uma acentuada variação na profundidade da fratura, uma discretização mais refinada nesta região deve ser efetuada.

Os exemplos escolhidos como teste para o sistema computacional desenvolvido ratificam o bom desempenho no estudo de estruturas quasi-axissimétricas. Os resultados satisfatórios com o emprego de um baixo número de harmônicos da Série de Fourier também atestam a eficiência do sistema tendo em vista que os exemplos mostrados não se preocupam com este importante aspecto do sistema. As aplicações feitas se caracterizam por serem de cunho acadêmico ou se apresentam como casos práticos específicos, sem mostrarem uma maior economia computacional e não sendo, portanto, possível verificar todas as potencialidades do sistema.

Embora tenha sido feito o desenvolvimento teórico dos três modos de abertura de fratura, o Modo I foi o único a ser implementado e nos exemplos analisados (Vasos de pressão e estruturas submetidas a carregamentos de tração), ele realmente é preponderante. Entretanto, o estudo dos demais modos é importante e faz parte de um trabalho em andamento no Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ (Referência [23]).

A continuação deste trabalho começa pela inclusão do Modelo de Linha de Molas em Elementos Finitos Tridimensionais (Referência [24]). Assim, o estudo de propagação de trincas em cascas modeladas com elementos tridimensionais fica facilitado. Além disso, outro desenvolvimento a ser feito diz respeito ao acoplamento dos Elementos Bidimensionais com os Elementos Tridimensionais através de um elemento de transição especialmente concebido para este fim. A implementação do Método de Extensão Virtual de Trinca para avaliação de seu crescimento será oportunamente efetuada para a consideração de análise de trincas passantes ou com acentuada profundidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FELLIPA, C.A. and GEERS, T.L., "Constraint Techniques for Coupling of Discrete Axisymmetric and General Structures", 3rd International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, SMIRT, Vol.5, Part M, London, 1975.
- [2] HAN, K.J. and GOULD, P.L., "Line Node and Transitional Shell Element for Rotational Shells", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.18, pp. 879-895, 1982.
- [3] ZIENKIEWICZ, O.C., The Finite Element Method in Engineering Science, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1977.
- [4] JACOB, B.P., Um Sistema Computacional para Análise de Casca de Revolução com Irregularidades Localizadas, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1983.
- [5] RICE, J.R. and LEVI, N., "The Part-Through Surface Crack in an Elastic Plate", Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, pp. 185-194, 1972.
- [6] AHMAD, S., IRONS, B.M. and ZIENKIEWICZ, O.C., "Curved Thick Shell and Membrane Elements with Particular Reference to Axisymmetric Problems", 2nd Conference on Matrix Methods of Structural Mechanics, pp. 539-572, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1968.

- [7] EBECKEN,N.F.F., Processo Semi-Analitico para a Análise de Estruturas Pelo Método dos Elementos Finitos, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1973.
- [8] DELARE,F. and ERDOGAN,F., "Line-Spring Model for Surface Cracks in a Reissner Plate", International Journal of Engineering Science, Vol.19, pp. 1331-1340, 1981.
- [9] DELARE,F. and ERDOGAN,F., "Application of the Line-Spring Model to a Cylindrical Shell Containing a Circunferential of Axial Part-Through Crack", Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.49, pp. 97-102, March, 1982.
- [10] GERMAN,M.D., KUMAR,V. and DELORENZI,H.G., "Analysis of Surface Cracks in Plates and Shells Using the Line-Spring Model and ADINA", Computers and Structure, Vol.17, pp. 881-898, 1983.
- [11] KUMAR,V., GERMAN,M.D. and SCHUMACHER,B.I., "Analysis of Elastic Surface Cracks in Cylinders Using the Line-Spring Model and Shell Finite Element Methods", Journal of Pressure Vessel Technology, Vol.107, pp. 403-411, November, 1985.
- [12] INGLIS,C.E., "Stresses in a Plate Due to Presence of Cracks and Sharp Corners", Proc. Inst. Naval Architects, 60, 1913.

[13] GRIFFITH,A.A., "The Theory of Rupture", Proc. of 1st Congress on Applied Mechanics, Eds. Biezeno and Burgers, pp. 55-63, 1924.

[14] IRWIN,G.R., "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Transversing a Plate", Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, 1957.

[15] ERDOGAN,F., "Fracture: Mechanics or Art ?", Computational Methods in the Mechanics of Fracture, Vol.2 in Computational Methods in Mechanics, Edited by S.N. Atluri, pp.3-17, Elsevier Science Publishers B.V., 1986.

[16] RICE,J.R., "A Part Independent Integral and the Approximate Analysis of Strains Concentration by Notches and Cracks", Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.35, 1968.

[17] RICE,J.R., "The Line-Spring Model for Surface Flaws", in Surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions, Edited by J.L. Swedlow, ASME, N.Y., 1972.

[18] SOUZA,L.A., Análise Elasto-Plástica da Propagação de Trincas Não-Passantes em Estruturas de Superfície Utilizando Elementos Escalares, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1986.

[19] SOUZA,L.A. e EBECKEN,N.F.F., "Análise dos Modos de Fratura I, II e III em Estruturas Laminares", MECOM

89, Porto, Portugal, 1989.

[20] TADA,H., PARIS,P.C. and IRWIN,G.R., The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corp., Hellertown, 1973.

[21] SORIANO,H.L., "Resolução de Sistemas de Equações Algébricas Lineares com Utilização de Memória Auxiliar de Computadores Digitais", Notas de Aulas do Curso Técnicas Computacionais em Análise Estrutural, COPPE/UFRJ, 1980.

[22] JACOB,B.P. e EBECKEN,N.F.F., "Um sistema Pré e Pós-Processador Gráfico para Análise Estrutural", Colloquia 1987, Vol.4, pp. 43-56, Porto Alegre, Brasil, 1987.

[23] SOUZA,L.A., Tese de Doutorado de Andamento, COPPE/UFRJ.

[24] FREITAS,M.S.R., Tese de Mestrado em Andamento, COPPE/UFRJ.

[25] KAIA,A.C. and ERDOGAN,F., "Stress Intensity Factor and C.O.D. in an Orthotropic Strip", International Journal of Fracture, Vol.16, pp. 171, 1980.

[26] EBECKEN,N.F.F., MOITA,G.F., JACOB,B.P. e SOUZA,L.A., "Computation of Crack-Growth in Axissymmetric Shells with Local Irregularities", Advances in Engineering Software, A ser publicado.

[27] DESVAUX,G.J., The Line-Spring Model for Surface Flaw, An Extension to Mode II and Mode III, Tese de M.Sc., MIT, 1985.

[28] COOK,R.D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Ed. John Wiley & Sons, N.Y., 1981.

APÊNDICE 1

Matriz de Transformação de Coordenadas para
o Elemento de Casca Axissimétrica

A matriz \underline{T} é formada pelos cossenos diretores nas direções meridional, circunferencial e normal, ou seja,

$$\underline{T} = [\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3] \quad (1.1)$$

\vec{v}_2 é o vetor unitário na direção circunferencial, \vec{j} :

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

\vec{v}_3 é um vetor unitário na direção normal à superfície média e é obtido através do produto de dois vetores tangentes a essa superfície :

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

O valor unitário de \vec{v}_3 é :

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{v}_3}{||\vec{v}_3||} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

\vec{v}_1 é o vetor unitário normal a \vec{v}_3 e \vec{v}_2 na direção meridional :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\partial x}{\partial \xi} \\ 0 \\ -\frac{\partial z}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Assim ,

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}_1}{||\vec{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial x}{\partial \xi} \\ 0 \\ -\frac{\partial z}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

De posse de (1.2), (1.4) e (1.6), substituindo-se em (1.1), chega-se a :

$$T = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}} \times \begin{bmatrix} -\frac{\partial x}{\partial \xi} & 0 & -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ 0 & \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} & 0 \\ -\frac{\partial z}{\partial \xi} & 0 & -\frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

APÊNDICE 2

Matriz de Transformação para os Elementos
de Cascas Geral e de Transição

A matriz de transformação para os elementos de casca geral e de transição é obtida da mesma maneira usada no apêndice 1 para o elemento de casca axissimétrica. A matriz T_i é composta pelos vetores unitários \vec{v}_{1i} , \vec{v}_{2i} e \vec{v}_{3i} (figura 2.1), responsáveis pela definição de um sistema cartesiano local $x'y'z'$ para cada nó i .

$$T_i = [\vec{v}_{1i} \quad \vec{v}_{2i} \quad \vec{v}_{3i}] \quad (2.1)$$

O vetor unitário \vec{v}_{3i} é normal à superfície média e é definido a partir dos dados para o nó i .

Os vetores unitários \vec{v}_{2i} e \vec{v}_{3i} são obtidos pelos produtos de $\vec{k} \times \vec{V}_3$ e $\vec{V}_3 \times \vec{V}_2$, respectivamente. Caso \vec{v}_{3i} seja paralelo a \vec{k} (o vetor espessura coincidir com a direção \vec{k}), não é possível determinar \vec{v}_{2i} deste modo. Neste caso pode-se considerar

$$\vec{v}_2 = \begin{Bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\vec{v}_1 = \begin{Bmatrix} -\cos \theta_1 \\ -\sin \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

A matriz \tilde{T}_{11} é a mesma \tilde{T}_1 , somente eliminando-se dela a terceira coluna, ou seja, \vec{v}_{31} .

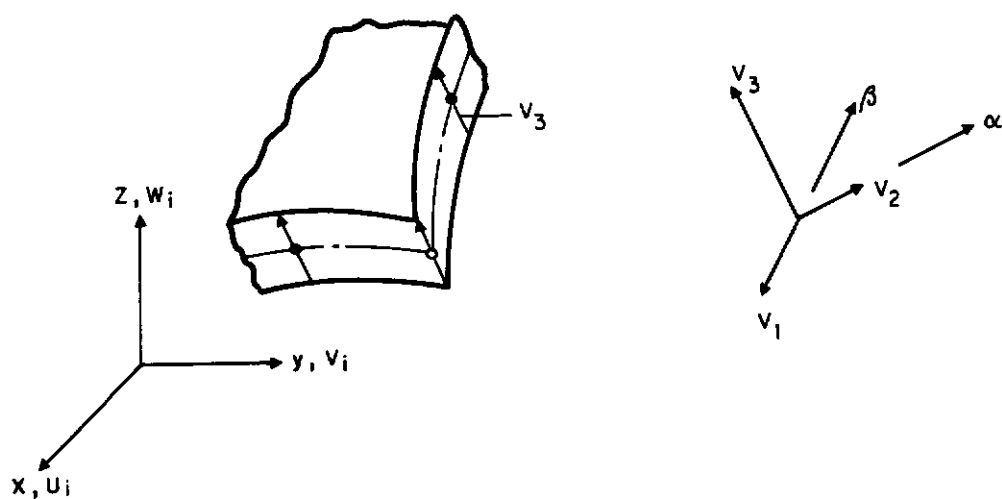


Figura 2.1

APÊNDICE 3

Determinação de g_t e g_f
e de α_{ij}

Os valores de g_t e g_f utilizados na equação (III.16) foram obtidos por KAIA e ERDOGAN [21] e são os seguintes :

$$g_t(\xi) = (\xi\Pi)^{1/2} \sum_{n=0}^6 A_n \zeta^{2n} \quad (3.1)$$

$$g_f(\xi) = (\xi\Pi)^{1/2} \sum_{n=0}^6 B_n \zeta^{2n} \quad (3.2)$$

Com $\zeta = 1/h$.

A tabela 3.1 mostra os valores para A_n e B_n .

n	A_n	B_n
0	1.1216	1.1202
1	6.5200	-1.8872
2	-12.3877	18.0143
3	89.0554	-87.3851
4	-188.6080	241.9124
5	207.3870	-319.9402
6	-32.0524	168.0150

Tabela 3.1 - Valores de A_n e B_n .

Na equação (III.20) são definidos os coeficientes α_{ij} , com $i,j = t,f$, em função dos valores g_t e g_f das

equações (3.1) e (3.2). Assim, feita a integração, os valores de α_{ij} ficam :

$$\alpha_{tt} = \zeta^2 \sum_{n=0}^{12} C_{tt}(n) \zeta^{2n} \quad (3.3)$$

$$\alpha_{tf} = \alpha_{ft} = \zeta^2 \sum_{n=0}^{18} C_{tf}(n) \zeta^{2n} \quad (3.4)$$

$$\alpha_{ff} = \zeta^2 \sum_{n=0}^{12} C_{ff}(n) \zeta^n \quad (3.5)$$

A tabela 3.2 dá os valores de C_{tt} , C_{tf} e C_{ff} .

n	$C_{tt}(n)$	$C_{tf}(n)$	$C_{ff}(n)$
0	1.9761	1.9735	1.9710
1	11.4870	-2.2166	-4.4277
2	7.7086	21.6051	34.4952
3	15.0143	-69.3133	-165.7321
4	280.1207	196.3000	626.3926
5	-1099.7200	-406.2608	-2144.4651
6	3418.9795	644.9350	7043.4169
7	-7686.9237	-408.9569	-19003.2199
8	12794.1279	-159.6927	37853.3028
9	-13185.0403	-988.9879	-52595.4681
10	7868.2682	4266.5487	48079.2948
11	-1740.2463	-2997.1408	-25980.1559
12	124.1360	-6050.7849	6334.2425
13		8855.3615	
14		3515.4345	
15		-11744.1116	
16		4727.9784	
17		1695.6087	
18		-845.8958	

Tabela 3.2 - Coeficientes C_{tt} , C_{tf} e C_{ff}